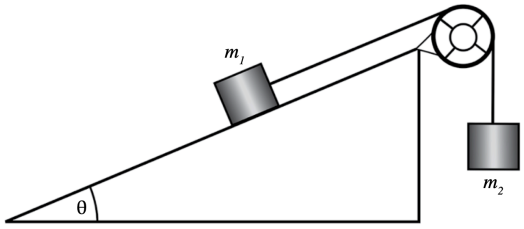
# MECÁNICA CLÁSICA

M1. Una partícula de masa $m_1$ se desliza sin fricción sobre un plano inclinado que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal. Esta partícula está conectada, mediante una cuerda inextensible de longitud $l$ y masa despreciable, a otra partícula de masa $m_2$, la cual cuelga verticalmente, como se muestra en la figura. El sistema está sometido a la acción de la gravedad, que actúa en dirección vertical hacia abajo. Se asume que ambas partículas se mueven únicamente a lo largo de la dirección impuesta por la cuerda, y que la polea es ideal: no tiene masa ni fricción, por lo que su dinámica puede despreciarse.




Resuelve los siguientes incisos:

a) **[1 punto]** Introduce una coordenada generalizada adecuada para describir el sistema, considerando que posee un único grado de libertad.

b) **[1 punto]** Expresa las posiciones de ambas partículas en función de la coordenada generalizada. Calcula sus velocidades.

c) **[1 punto]** Escribe la energía cinética del sistema.

d) **[1 punto]** Obtén una expresión para la energía potencial del sistema.

e) **[1 punto]** Calcula el Lagrangiano del sistema.

f) **[1 punto]** Aplica la ecuación de Lagrange para obtener la ecuación de movimiento.

g) **[1 punto]** Calcula el momento canónico conjugado a la coordenada generalizada.

h) **[1 punto]** Escribe el Hamiltoniano del sistema.

i) **[1 punto]** Interpreta físicamente el Hamiltoniano obtenido.

j) **[1 punto]** Deriva las ecuaciones de Hamilton correspondientes.

## ELECTROMAGNETISMO

E1. **[4 puntos]** Expansión multipolar.
En un marco de referencia se tiene una distribución de carga descrita por

$$\rho(\vec{r}) = \lambda_0 \sin(\phi)\delta(R-r)\delta(z) \ ,$$

donde $(r, \phi, z)$ son coordenadas cilíndricas (con $\phi$ el ángulo azimutal), y $\lambda_0$ y $R$ son constantes.

*a*) ¿Cuál es el momento multipolar dominante de esta distribución de carga para un observador situado a una distancia $|\vec{r}| \gg R$ del origen del marco de referencia?

*b*) Calcula el campo eléctrico en coordenadas cartesianas para esta distribución de carga, en la región $|\vec{r}| \gg R$.

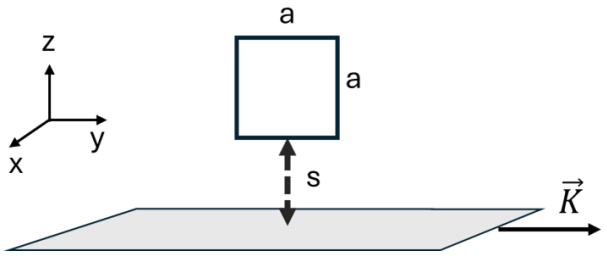
E2. **[4 puntos]** FEM en una espira cuadrada.
Una espira cuadrada de lado $a$ y resistencia $R$, se encuentra a una distancia $s$ de un plano con área $A$ muy grande por el cual pasa una densidad de corriente superficial $\mathbf{K}(t)$ (ver figura), que decae como

$$\mathbf{K}(t) = \begin{cases} K_0(1-\alpha t)\hat{y} & \text{para } t < 1/\alpha \\ 0 & \text{para } t \geq 1/\alpha \end{cases} \ .$$

*a*) Encuentra el flujo de $B$ a través de la espira.

*b*) ¿Cuál es la fuerza electromotriz generada? ¿Cuál es la dirección (horaria o anti-horaria en la figura) en la que fluye la corriente?

*c*) ¿Qué diferencia hay con el inciso anterior si ahora la espira se mueve con velocidad $v$ hacia la derecha?




E3. **[2 puntos]** Radiación.
Considera una esfera en cuya superficie se distribuye de forma homogénea una carga $Q_0$. Si el radio de la esfera depende del tiempo de la forma

$$r(t) = r_0\left(1 + \frac{1}{2}\sin(\omega t)\right) ,$$

donde $r_0$ es el radio de la esfera al tiempo $t = 0$ y $\omega$ es la frecuencia de oscilación del radio, ¿cuál es la energía total radiada por unidad de tiempo? Argumenta tu respuesta.

# MECÁNICA CUÁNTICA

C1. a) **[2 puntos]** Considera el siguiente estado de tres partículas, 1,2,3, cada una de espín 1/2:

$$|jm_j\rangle = |3/2\ 3/2\rangle = |\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle\ .$$

Obtén el valor propio del operador de momento angular total aplicando directamente $(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3)^2$ a $|jm_j\rangle$. Pista: $\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = \frac{1}{2}((\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_j)^2 - \mathbf{S}_i^2 - \mathbf{S}_j^2)$.

b) **[2 puntos]** Demuestra que es separable la ecuación de Schrödinger para 3 partículas desacopladas que se mueven en una dimensión, estando sujeta cada una a un potencial de oscilador armónico, $V(x_i) = \frac{1}{2}mw^2x_i^2$ (donde el subíndice $i = 1, 2, 3$ identifica a cada partícula). Para este caso, partiendo de los estados de una partícula $|n_i\rangle$, donde $n$ es el número de cuantos del oscilador armónico, construye el estado *totalmente antisimétrico* $|\Psi_A\rangle$ que involucra al estado base y al primer y el segundo estados excitados, es decir, combinaciones de $n = 0, 1, 2$.

c) **[1 punto]** En el sistema del inciso anterior, suponiendo que cada partícula tiene espín 1/2, ¿es posible construir un estado antisimétrico (como se requiere para sistemas de momento angular total con número cuántico asociado fraccionario), solución de la ecuación de Schrödinger, a partir de $|jm_j\rangle$ en a) y $|\Psi_A\rangle$ en b)? Si es posible, constrúyelo; si no es posible, explica por qué.

C2. Una molécula está compuesta por cuatro átomos idénticos $A_1$, $A_2$, $A_3$ y $A_4$ que forman un cuadrado. Llamemos $|\phi_n\rangle$ al estado de un electrón localizado en el $n$-ésimo átomo. En el régimen de amarre fuerte, el Hamiltoniano asociado a los $|\phi_n\rangle$ está dado por $\mathbb{H} = V \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [**2 puntos**] Verifica que los estados $|\Psi_\pm\rangle = |\phi_1\rangle \pm |\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle \pm |\phi_4\rangle$, $|\Psi_0^1\rangle = |\phi_1\rangle - |\phi_3\rangle$ y $|\Psi_0^2\rangle = |\phi_2\rangle - |\phi_4\rangle$ son vectores propios (no normalizados) de la molécula.

b) [**1 punto**] Extrae las energías asociadas a $|\Psi_\pm\rangle$, $|\Psi_0^{1,2}\rangle$, en a) y su posible degeneración.

c) [**2 puntos**] Si el electrón al tiempo $t = 0$ está en el estado $|\Psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle + |\phi_3\rangle)$, ¿cuál es su estado al tiempo $t$?

## TERMODINÁMICA

T1. **[2 puntos]** Un gas ideal monoatómico ($C_v = 1.5R$) inicialmente a 298 K y una presión de 1.013 MPa se expande adiabática y reversiblemente hasta alcanzar el equilibrio con una presión constante de 0.1013 MPa. ¿Cuál es la temperatura final del gas?

T2. **[2 puntos]** Deriva la expresión para la desigualdad de Clausius para el siguiente proceso:

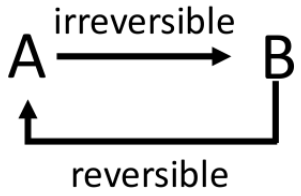



Figura 1: Proceso

T3. Demuestra que los diferenciales de los tres potenciales termodinámicos $U$, $H$ y $F$ pueden escribirse de la siguiente manera:

(i) **[2 puntos]**

$$dU = (C_p - PV\beta)dT + V(\kappa P - \beta T)dP \ ,$$

donde $\beta \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ y $\kappa \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$.

(ii) **[2 puntos]**

$$dH = C_p dT + V(1 - \beta T)dP \ ,$$

(iii) **[2 punto]**

$$dF = -(PV\beta + S)dT + PV\kappa dP \ .$$

## FÍSICA MODERNA para Maestría en Física

1. F1. Dos naves espaciales 1 y 2 se mueven respecto a un determinado sistema de referencia $K$ a una velocidad de $4/5$ c y $-4/5$ c, respectivamente. Al tiempo $t = 0$ del sistema $K$, se encuentra cada una a una cierta distancia $L$ respectivamente a la izquierda y a la derecha del origen, como se muestra en la Figura 2. Justo al pasar por esos sitios, el reloj de cada nave se inicializa a $t_1 = 0$, $t_2 = 0$. Después de 1 año medido desde $K$, se encuentran en el origen. Determina:

   *a*) **[1.5 puntos]** El valor numérico de la distancia $L$, medida desde el sistema $K$.

   *b*) **[1.5 puntos]** El tiempo que marca el reloj de la nave 1 en el momento del cruce. ¿El tiempo que marca el reloj de la nave 2 en el momento del cruce es el mismo? Explica brevemente.

   *c*) **[2 puntos]** La velocidad de la nave 2 en el sistema de referencia de la nave 1.

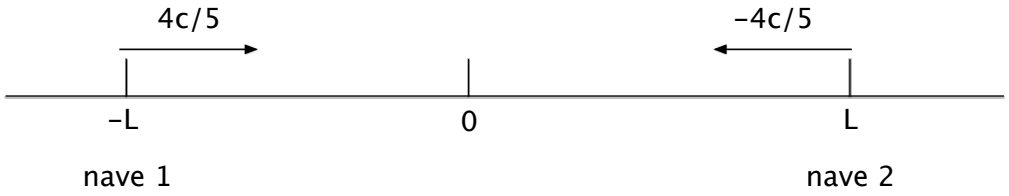



Figura 2: Esquema de las naves espaciales mencionadas en el problema F1.

2. F2. Una partícula de energía en reposo $mc^2$ se mueve con velocidad $v$ en la dirección positiva de $x$. La partícula decae en dos partículas, cada una con energía en reposo de 140 MeV. Una de ellas, con energía cinética 282 MeV, se mueve en la dirección positiva de $x$, la otra partícula, con energía cinética 25 MeV, se mueve en la dirección negativa de $x$. Recuerda que $T = E - E_0$, donde $T$ es la energía cinética, $E$ es la energía total relativista y $E_0$ es la energía en reposo. Determina:

   *a*) **[2.5 puntos]** El valor numérico de la energía en reposo de la partícula original.

   *b*) **[2.5 puntos]** La velocidad de la partícula original.

## FÍSICA MODERNA para Maestría en Física Médica

FM1. El $^{57}$Co decae vía captura electrónica al $^{57}$Fe. La masa atómica del $^{57}$Co y del $^{57}$Fe es 56.9362898 u y 56.9353920 u, respectivamente.

a) **[2 puntos]** Calcula el valor Q de este decaimiento y explica por qué el $^{57}$Co no puede decaer vía $\beta^+$ al $^{57}$Fe. Ayuda: 1 u=931.49 MeV/$c^2$; $m_e c^2$=511 keV.

b) **[2 puntos]** El decaimiento por captura electrónica del $^{57}$Co es a un estado excitado del $^{57}$Fe, por lo que se emite una gamma de $E$ =122.1 keV. Si esta gamma interactúa por efecto Compton con el medio, ¿cuál es la energía del electrón Compton cuando el fotón dispersado se emite a un ángulo $\theta$=85.5° respecto de la dirección original de la gamma?
Ayuda: recuerda que la energía (en keV) del fotón dispersado está dada por $E' = \frac{E}{1+(E/511)(1-\cos\theta)}$

c) **[1 punto]** ¿Cuál es la energía máxima que este electrón Compton le puede transferir a un electrón en reposo?

FM2. **[5 puntos]** Una muestra radioactiva consiste de una mezcla de $^{35}$S y de $^{32}$P. Inicialmente ($t = 0$), el 5 % de la actividad es debida al $^{35}$S y 95 % debida al $^{32}$P. La vida media (el tiempo necesario para que en promedio la mitad de los núcleos decaigan) del $^{35}$S y de $^{32}$P es de 87.4 días y 14.3 días, respectivamente. ¿A qué tiempo $t$ las actividades de ambos radionúclidos en la muestra serán iguales?