MECÁNICA CLÁSICA

M1. **Nota que al final del problema listamos algunas formúlas útiles.** Un resorte sin masa, de longitud relajada b y constante elástica k, conecta dos partículas de masas $m_1 = 2m$ y $m_2 = m$. El sistema descansa sobre un plano (sin fricción) y puede oscilar y rotar, de manera tal que el resorte siempre se mantiene recto.

(a) [**2 puntos**] En coordenadas polares cuyo origen coincide con el centro de masa, denotadas (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2), muestra que $r_1 = r_2/2$ y $\theta_1 = \theta_2 - \pi$. ¿Se está describiendo el sistema desde un marco inercial? Justifica tu respuesta.

(b) [**2 puntos**] Escribe el Lagrangiano del sistema en términos de (r_2, θ_2).

(c) [**2 puntos**] Encuentra las ecuaciones de movimiento asociadas a r_2 y θ_2 en el formalismo Lagrangiano.

(d) [**2 puntos**] ¿Cuál es el Hamiltoniano del sistema? ¿Hay alguna coordenada cíclica?

(e) [**2 puntos**] Supón ahora que la constante elástica depende del tiempo de acuerdo con

$$k(t) = \begin{cases} k_0, & \text{si } t < 0, \\ k_0 - t\alpha, & \text{si } 0 \leq t \leq k_0/\alpha\ , \\ 0, & \text{si } t > k_0/\alpha, \end{cases}$$

donde α y k_0 son constantes positivas. Durante el intervalo $0 < t < k_0/\alpha$, ¿se conserva la energía total?

Fórmulas útiles:

- La fuerza ejercida por el resorte tiene magnitud

$$F = k|r - b|,$$

donde r es la distancia entre las dos partículas.

- El gradiente de una función f cumple:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}.$$

- En coordenadas polares (r, θ) arbitrarias, la primera derivada temporal del vector posición satisface

$$\dot{\vec{r}} \;=\; \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta},$$

donde $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ son vectores ortonormales.

ELECTROMAGNETISMO

E1. Dos cilindros largos y delgados tienen un mismo eje, como se muestra en la figura. El cilindro interno, de radio R_1, es conductor, no está cargado, y transporta una corriente I hacia la derecha (en la imagen, hacia adentro de la página). El cilindro externo, de radio R_2, es aislante, y tiene una carga por unidad de longitud dada por λ. Ignorando efectos de borde, calcula:

(a) **[1 punto]** El campo eléctrico en la región entre ambos cilindros.

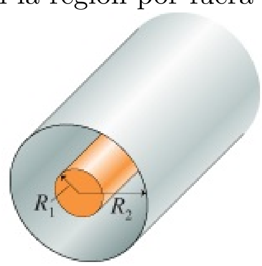
(b) **[1 punto]** El campo magnético en la región entre ambos cilindros.

(c) **[1 punto]** El campo eléctrico en la región por fuera del cilindro exterior.

(d) **[1 punto]** El campo magnético en la región for fuera del cilindro exterior.

(e) **[1 punto]** La densidad de energía electromagnética en la región entre ambos cilindros.

(f) **[1 punto]** El vector de Poynting en la región por fuera del cilindro exterior.



E2. (a) **[1 punto]** Considera una onda electromagnética plana propagándose en un medio dieléctrico sin cargas ni corrientes libres. La onda electromagnética es caracterizada por los campos $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_o e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_o e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$. Utiliza las ecuaciones de Maxwell para determinar el campo magnético $\boldsymbol{B}$ en términos del eléctrico $\boldsymbol{E}$.

(b) **[1 punto]** Usando el resultado de a), verifica que $B_o = \frac{n}{c}E_o$, donde $B_o = |\boldsymbol{B}_o|$, $E_o = |\boldsymbol{E}_o|$, n es el índice de refracción del medio y c es la velocidad de la luz en el vacío. Recuerda que la velocidad de fase también se puede escribir como $v_{\text{fase}} = c/n = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

(c) **[2 puntos]** Considera ahora una onda electromagnética plana propagándose en un medio dieléctrico con índice de refracción n, que incide normal sobre una superficie dieléctrica con índice de refracción n'. Denota los campos eléctricos incidente, transmitido y reflejado con

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_o e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\,, \qquad \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_o{}' e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}_o{}'' e^{i(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\,, \quad \text{respectivamente.}$$

Considera $\mu = \mu'$ y las condiciones de frontera apropiadas para el campo eléctrico con polarización normal al plano de incidencia (para $\boldsymbol{E}$ transversal y $\boldsymbol{H}$ transversal). Encuentra las ecuaciones que conectan antre sí a las amplitudes $E_o, E_o{}'$ y $E_o{}''$.

MECÁNICA CUÁNTICA

C1. Para este problema, te será útil recordar que las expresiones para los operadores $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ en la base donde $\hat{S}_z$ es diagonal son:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x \ , \ \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y \ ,$$

siendo

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Considera un átomo con dos niveles que denotaremos $|+\rangle$ y $|-\rangle$. Al tiempo $t = 0$, el átomo se encuentra en el estado

$$|\Psi(0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$$

y que está inmerso en un campo magnético uniforme $\vec{B}_0 = \hat{k}B_0$ (el campo apunta en la dirección del eje z). Los estados $|\pm\rangle$ son estados propios del operador $\hat{S}_z$.

El Hamiltoniano del sistema es

$$H = -\left(\frac{eB_0}{mc}\right)\hat{S}_z \equiv \omega_0\hat{S}_z \ .$$

(a) [**3 puntos**] Encuentra el estado del sistema a un tiempo $t > 0$ arbitrario.

(b) [**3 puntos**] Encuentra el valor medio de $\hat{S}_z$ al tiempo t.

(c) [**4 puntos**] Encuentra el valor medio de $\hat{S}_x$ y de $\hat{S}_y$ al tiempo t.

TERMODINÁMICA

T1. Considera un gas ideal en un cilindro con un pistón móvil y sin fricción. El sistema pasa de un estado termodinámico inicial a una presión $P_i = 10^5$ Pa y un volumen $V_i = 10^{-3}$ m^3 a un estado final a presión $P_f = 1/32 \times 10^5$ Pa y volumen $V_f = 8 \times 10^{-3}$ m^3 en un proceso adiabático cuasi-estático, tal que $P^3V^5 =$ constante. Ahora considera otro proceso termodinámico que lleva al sistema desde el mismo estado inicial al mismo estado final en dos pasos: una expansión isobárica en P_i seguida de un proceso isocórico (isovolumétrico) en el volumen V_f.
(a)[**2 puntos**] ¿Cuál es el calor suministrado al sistema en el proceso de dos pasos?
(b)[**1 punto**] Dibuja los procesos en un diagrama de PV e indica los intercambios calóricos.
(c)[**1 punto**] ¿Cuánto vale la energía interna del gas en el estado inicial y final?
(d)[**1 punto**] Calcula la variación de entropía en todos los procesos.

T2. La presión debida a la radiación en equilibrio térmico dentro de una cavidad depende solamente de la temperatura T de la cavidad y no de su volumen V. En tal caso, la ecuación de estado se escribe como

$$P = \frac{1}{3}\sigma T^4,$$

donde σ es una constante.

(a)[**1 punto**] Encuentra la ecuación de estado para un proceso adiabático.
(b)[**2 puntos**] Encuentra el trabajo realizado sobre la radiación cuando se lleva la cavidad de un estado (V_1, T_1) a un estado (V_2, T_2), con $V_1 > V_2$ y $T_1 < T_2$ en un proceso adiabático, y en un proceso isotérmico a temperatura T_1.
(c)[**2 puntos**] Encuentra el rendimiento térmico de una máquina de Carnot que opera en dos cavidades con radiación entre dos temperaturas T_H y T_C con $T_H > T_C$. Compara tu resultado con un gas ideal y discute tu resultado.

FÍSICA MODERNA

F1. **[3.3 puntos]** Un haz de electrones entra en un campo magnético uniforme de densidad de flujo de 1.2 T. Halla la diferencia de energía entre los electrones cuyos espines son paralelos y antiparalelos al campo.

F2. **[3.3 puntos]** La vida media de un mesón π, en su propio marco de referencia, es de 26.0 ns.

(a) **[1.3 puntos]** Si el mesón π se mueve con una velocidad de $0.95c$ con respecto a la Tierra, ¿cuál es la vida media que determina una persona en reposo en la Tierra?

(b) **[2 puntos]** ¿Cuál es la distancia promedio que recorre un conjunto de mesones π antes que la mitad de ellos se desintegre, medida por una persona en reposo en la Tierra?.

F3. **[3.3 puntos]** Una muestra de un material radioactivo decae a una tasa de 548 por segundo at tiempo $t = 0$. Cuando $t = 48$ minutos, la tasa de conteo se ha reducido a 213 por segundo.

(a) **[1.8 puntos]** ¿Cuál es la constante de decaimiento?

(b) **[1.5 puntos]** ¿Cuál será la tasa de decaimiento al tiempo $t = 125$ minutos?