# MECÁNICA CLÁSICA

M1. En una mesa tenemos un triángulo equilátero fijo. Hay tres resortes sujetados a los vértices del triángulo y a un objeto de masa $m$ que se desliza sin fricción sobre la mesa.

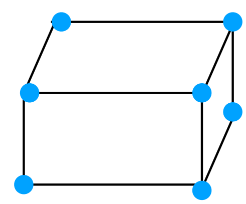
Considera el caso en que los tres resortes tienen la misma constante de elasticidad $k$. Claramente, la configuración en la que el objeto está en centro del triángulo es un punto de equilibrio estable.

Ahora perturbamos el sistema dándole una pequeña velocidad inicial $\vec{v}_0$ distinta de cero, con posición inicial igual a la posición de equilibrio. (Ignoremos posibles choques del objeto con el triángulo.)

a) **[2.0 puntos]** Encuentra por lo menos 3 velocidades iniciales $\vec{v}_0$, en direcciones distintas, tales que el movimiento esté confinado a una línea que pasa por el centro del triángulo, y di cuáles son las frecuencias de las oscilaciones correspondientes.

b) **[3.0 puntos]** Considera ahora una perturbación por una velocidad inicial $\vec{v}_0$ arbitraria (con posición inicial en el centro del triángulo). ¿Qué puedes decir sobre el movimiento resultante?

M2. Consideremos un cuerpo rígido que consta de 8 pequeñas pelotas iguales de masa $m$ conectadas entre sí de manera rígida por varillas con masa despreciable. La configuración es el esqueleto de una caja con dos tapas cuadradas de lado $l$ y con caras laterales rectangulares con lados $l$ y $2l$.



El experimento se realiza en caída libre, de modo que podemos ignorar la fuerza gravitacional. No hay ninguna otra fuerza externa actuando sobre el cuerpo.

Considera una condición inicial con velocidad del centro de masa igual a $\vec{v}_0$ y velocidad angular del cuerpo (con respecto al centro de masa) igual a $\vec{\omega}_0$. Describe cualitativamente el movimiento del cuerpo (justificando todos los elementos de tus respuestas):

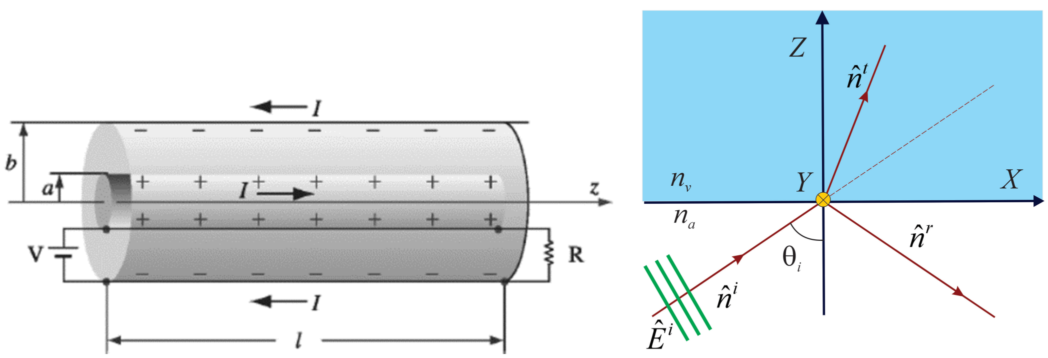
a) **[1.0 puntos]** ¿Cómo se comporta la velocidad del centro de masa del cuerpo $\vec{v}(t)$?

b) **[2.0 puntos]** ¿Cómo se comporta la velocidad angular del cuerpo $\vec{\omega}(t)$?

c) **[2.0 puntos]** Da condiciones iniciales con $\vec{\omega}_0 \neq 0$ para las que la descripción de $\vec{\omega}(t)$ se simplifique.

## ELECTROMAGNETISMO

E1. [**6 puntos**] Un cable largo coaxial, de longitud $l$, consiste en un conductor interno de radio $a$ y uno externo de radio $b$. El conductor interno tiene una carga uniforme por unidad de longitud $\lambda$, y transporta una corriente estacionaria **I** hacia la derecha; el conductor externo tiene carga y corriente opuestas. Supón que los dos conductores se mantienen a una diferencia de potencial **V**. (Ver Figura 1(a)).
**a)** Encuentra el campo eléctrico entre los dos cilindros.
**b)** Encuentra el campo magnético entre los dos cilindros.
**c)** Calcula el vector de Poynting $\vec{S}$.
**d)** Calcula la energía por unidad de tiempo (potencia) **P** transportada por los cables.
**e)** Verifica que se cumple **P=VI**.
**f)** Evalúa el momento electromagnético $\vec{p}$ almacenado en los campos.




(a) Ejercicio 1. (b) Ejercicio 2.

Figura 1

E2. [**4 puntos**] Considera una onda plana electromagnética descrita por

$$\vec{E}^i = (-\hat{x}\cos\theta_i + \hat{z}\sin\theta_i)\, E_0 \,\mathbf{exp}\left[i\left(\vec{k}^i\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right] + \hat{y}E_0\,\mathbf{exp}\left[i\left(\vec{k}^i\cdot\vec{r} - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \ ,$$

donde la $i$ es parte del nombre (se refiere a 'incidente'), y $\vec{k}^i = k\hat{n}^i$, con $\hat{n}^i = \hat{x}\sin\theta_i + \hat{z}\cos\theta_i$. Responde lo siguiente:
**a)** ¿Cuál es el estado de polarización de esta onda electromagnética? (Ver figura 1(b)).
**b)** Determina el campo magnético $\vec{H}^i$. Considera que los medios son transparentes.
**c)** Suponiendo que la onda incide sobre una interfase aire-vidrio en $z = 0$, determina la onda reflejada $\vec{E}^r$ en términos de los coeficientes de Fresnel $r_p$ y $r_s$.
**d)** Si el campo $\vec{E}^i$ incide al ángulo de Brewster, ¿cuál es la polarización de la onda reflejada $\vec{E}^r$?

# MECÁNICA CUÁNTICA

Fórmula relevante:
$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\gamma x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$.

En los siguientes 2 problemas, consideraremos un oscilador armónico unidimensional de frecuencia $\omega$, para una partícula de masa $m$. El hamiltoniano es $H_{0\omega} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d^2x} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, con espectro $E_{0n} = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$, desde $n=0$, y función de onda del estado base (normalizada) $\psi_\omega(x) = (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$.

Nota que el subíndice $\omega$ aquí se está usando para enfatizar que el perfil de esta función de onda depende del valor de la frecuencia.

C1. Se aplica la perturbación $H_{1\omega}$ con dependencia $H_{1\omega}(x) = \alpha|\psi_\omega(x)|^2$, $\alpha > 0$ (es decir, la perturbación está definida en términos de la función de onda del estado base).

a) [**2 puntos**] Calcula el valor de expectación $V(\omega,\omega') \equiv \langle\psi_{\omega'}|H_{1\omega}|\psi_{\omega'}\rangle$.

b) [**1 punto**] Demuestra que $V(\omega,\omega') = V(\omega',\omega)$.

c) [**2 puntos**] Encuentra la modificación en la energía del estado base a primer orden en teoría de perturbaciones por $H_{1\omega}(x)$. Pista: usa C1a).

C2. Dado el hamiltoniano total $H_{0\omega} + H_{1\omega}$, con $H_{1\omega}$ definido en C1, y usando $\psi_{\omega'}$ como función de prueba, y $\omega'$ como parámetro, resuelve el problema variacional (función de onda que mejor aproxima la energía del estado base), mediante los siguientes pasos:

a) [**2 puntos**] Calcula $\langle\psi_{\omega'}|\beta x^2|\psi_{\omega'}\rangle$, con $\beta$ una constante real. Pista: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2 e^{-\gamma x^2} = -\frac{d}{d\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\gamma x^2}$.

b) [**2 puntos**] Notando que $H_{0\omega}(x) = H_{0\omega'}(x) - \frac{m}{2}({\omega'}^2 - \omega^2)x^2$, obtén $\langle\psi_{\omega'}|H_{0\omega}|\psi_{\omega'}\rangle$, usando el inciso anterior.

c) [**1 punto**] Indica, mediante valores de expectación, la condición sobre $\omega'$ que resuelve el problema variacional.

## FÍSICA MODERNA (Maestría en Física)

F1. Preguntas conceptuales. Aporta una respuesta **concisa** y directa.

(a) [**1 punto**] Muestra de manera simple y directa que las transformaciones de Lorentz indican que es imposible que entre dos sistemas inerciales exista una rapidez relativa mayor a $c$.

(b) [**1 punto**] Ignorando el espín del electrón en un átomo hidrogenoide, ¿en cuántas líneas espectrales se divide la línea espectral asociada a la transición $2p \to 1s$ al aplicar un campo magnético? ¿Por qué?

(c) [**2 puntos**] De acuerdo a la teoría de bandas, ¿un cristal constituido por un mol de hidrógeno no molecular se comporta como aislante o como conductor? ¿Por qué?

(d) [**1 punto**] Justifica si tras alguna serie de decaimientos radiactivos es posible el siguiente resultado o no:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + \alpha + \mathrm{e} + \bar{\nu}_e \,.$$

(e) [**1 punto**] Indica todas las razones por las que la siguiente reacción no ocurre en la naturaleza:

$$p \longrightarrow \pi^+ + \mu + \nu_e + \bar{\mathrm{e}} \,.$$

El pión $\pi^+$ está formado por un quark $u$ y un antiquark $\bar{d}$, tiene la misma carga que un positrón y su masa es aproximadamente $1/6.7$ veces la del protón. El muón tiene una masa equivalente a $1/9$ de la masa del protón, y su carga coincide con la del electrón.

F2. [**2 puntos**] Una astronauta viaja con velocidad constante durante 2 años desde la Tierra para encontrar otro sistema solar. Después regresa a la Tierra con la misma rapidez. Al regresar, sus colegas en la Tierra dicen que han pasado 8 años. ¿Con qué rapidez viajó la astronauta? ¿Qué tan lejos (en km) está el nuevo sistema solar de acuerdo a las mediciones de la astronauta? (*Puedes aproximar* $c \approx 300{,}000\, km/s$.)

F3. [**2 puntos**] La semivida $t_{1/2}$ de un núcleo radiactivo se define como el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de los núcleos en la muestra original, $N_0$. Siguiendo la ley de decaimiento, esto implica

$$N(t_{1/2}) = \frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \,,$$

donde $\lambda$ es la constante de decaimiento radiactivo. Considere que la semivida de $^{24}_{11}\mathrm{Na}$ es $t_{1/2} = 15\,\mathrm{h}$. ¿Cuánto tiempo tardarían $N_0$ núcleos en reducirse a la fracción $2^{-5}N_0$ de la muestra original?

# TERMODINÁMICA

T1. **[2.0 puntos]** Ecuación de Helmholtz. Usando la identidad,

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}\right)_N = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}\right)_N,$$

y $dU = TdS - pdV$, muestra que para un sistema cerrado se cumple la ecuación

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T^2\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{p}{T}\right)_V.$$

T2. **[2.0 puntos]** El cambio de entropía de un sistema, $dS$, se puede separar en dos contribuciones: el cambio debido a procesos irreversibles, $d_iS$, y el cambio debido a intercambios de energía y materia, $d_eS$, $dS = d_eS + d_iS$. Usando esto, demuestra que, a entropía $S$ y presión $p$ constantes, el cambio de entalpía para un sistema cerrado, $dH$ (con $H \equiv U + pV$), cumple con

$$dH \leq 0.$$

T3. (a) **[2.0 puntos]** El ciclo de Carnot se ilustra en la Fig. 1 en la representación de presión y volumen, $p - V$. A partir de este diagrama, dibuja el ciclo de Carnot en la representación de temperatura y entropía, $T - S$.

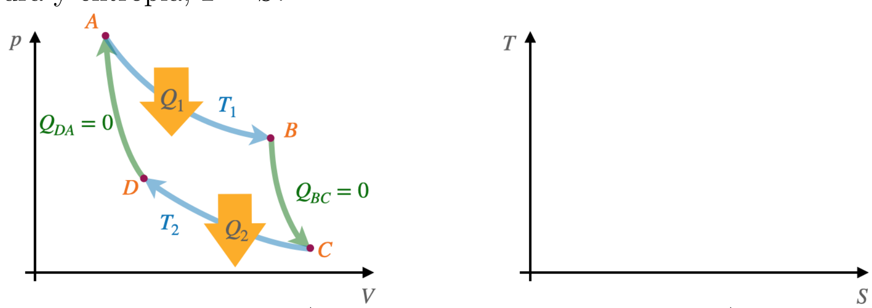



Figura 2: Ciclo de Carnot: Izquierda) Representación $p - V$. Derecha) Representación $T - S$.

(b) **[2.0 puntos]** La ecuación de estado de un gas de van der Waals es

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} .$$

Explica cuál es la física detrás de las constantes $b$ y $a$.

(c) **[2.0 puntos]** Usando la ecuación

$$dU = C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right]dV \ ,$$

calcula el trabajo hecho en un ciclo de Carnot, $W_{ciclo}$, usando un gas de van der Waals como sustancia de trabajo. *Pista*: Solo se necesita usar el calor absorbido $Q_1$ y el hecho de que la eficiencia de la máquina es $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.