MECÁNICA CLÁSICA

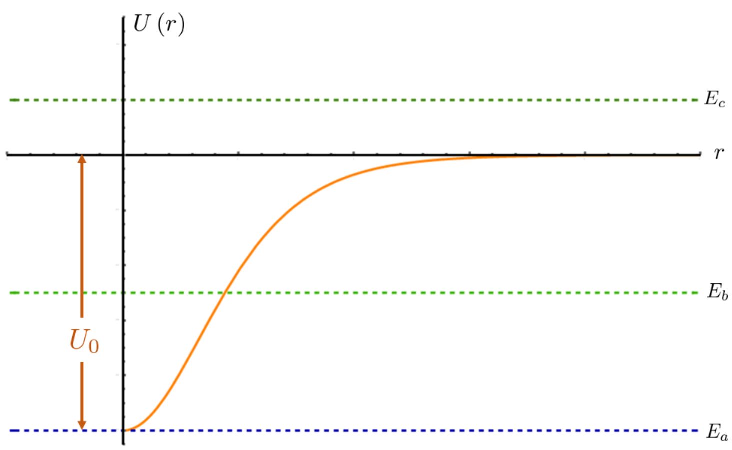
M1. Consideremos un potencial central de dos partículas en tres dimensiones que tiene la siguiente forma:

$$U(r) = -\frac{U_0}{\cosh^2\left(\frac{r}{\alpha}\right)}\ , \tag{1}$$

donde U_0 es la profundidad del potencial y α es una constante que tiene unidades de distancia. La forma de este potencial está representada en la figura de abajo. Por otro lado, la energía cinética de este sistema puede escribirse en coordenadas esféricas:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right), \tag{2}$$

donde m es la masa reducida.



a) **[2.0 puntos]** Proponga la Lagrangiana y escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange para las coordenadas r, θ y ϕ.

b) **[2.0 puntos]** Deduzca la forma de los momentos generalizados p_r, p_θ y p_ϕ y escriba la energía cinética de la ec. (2) en términos de estos momentos.

c) **[0.5 puntos]** ¿Cuántas constantes de movimiento hay, y por qué?

d) **[2.0 puntos]** Tomando únicamente la forma del potencial en la ec. (1) y analizando el gráfico, ¿cómo deberían ser las órbitas para las energías E_a, E_b y E_c?

e) **[1.0 punto]** Si aproximamos el potencial a oscilaciones alrededor del punto de equilibrio de la ec. (1), muestre que la frecuencia resultante es una función de la forma $\omega(\alpha, U_0)$. (*Pista*: $\mathrm{sech}^2(x) = 1 - x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \mathcal{O}(x^7)$).

f) **[2.0 puntos]** Escriba la Hamiltoniana para este sistema e identifique la energía potencial efectiva debida a la contribución de la fuerza centrífuga.

g) **[0.5 puntos]** Haga un gráfico de la contribución centrífuga al potencial de la ec. (1).

MECÁNICA CUÁNTICA

C1. Considere el potencial para un pozo de potencial rectangular infinito de ancho a dado por

$$V(x) = \begin{cases} \infty \quad , & x \leq 0 \quad \text{o} \quad a \leq x \ , \\ 0 \quad , & 0 < x < a \ . \end{cases} \tag{1}$$

Note que no es necesario completar a) para realizar el resto de los incisos.

a) [**2 puntos**] Explique cómo se llega a que el espectro de energías para una partícula de masa m en este potencial está dado por

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2 2m}(n+1)^2 \ , \tag{2}$$

para n un entero mayor o igual a 0.

b) Si al tiempo $t = 0$ la partícula se encuentra en el estado

$$\frac{1}{2}\psi_0 + \frac{1}{2}\psi_1 + \alpha\psi_2 \ , \tag{3}$$

con ψ_n la función de onda normalizada correspondiente al estado con energía E_n del inciso anterior:

i) [**0.5 puntos**] ¿Cuánto debe valer la norma de la constante α para que dicho estado sea físicamente aceptable?

ii) [**0.5 puntos**] Calcule la probabilidad de que al medir la energía al tiempo $t = 0$ se obtenga $\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2 2m}\frac{23}{4}$.

iii) [**0.5 puntos**] Calcule la probabilidad de que al medir la energía al tiempo $t = 0$ se obtenga $\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2 2m}9$.

iv) [**0.5 puntos**] Calcule el valor esperado de la energía al tiempo $t = 0$.

c) [**1.5 puntos**] Escriba el estado de la partícula para un tiempo arbitrario t si parte del estado inicial del inciso anterior, y especifique cuáles de las respuestas a las preguntas del mismo inciso dependen de t.

d) Suponga que coloca otra partícula de la misma masa m en el mismo potencial.

i) [**1 punto**] En términos de los estados ψ_n de una partícula, y sin usar la forma explícita de estos, escriba el estado de mínima energía para este sistema y su energía asociada si las dos partículas son bosones indistinguibles de espín 0.

ii) [**1.5 puntos**] Escriba en la misma forma el estado de mínima energía para este sistema y su energía asociada si las dos partículas son fermiones indistinguibles de espín 1/2. Note que el estado que se pide presentar debe incluir la información del espín, para lo cual, y en lo que sigue, pedimos que use la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de estados propios del operador de espín en la dirección z.

iii) [**2 puntos**] Escriba los cuatro estados de este sistema que comparten la energía $\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2 2m}5$ cuando las dos partículas son fermiones indistinguibles de espín 1/2. Elija dichos estados de forma que tengan valores determinados para la componente z y el cuadrado del espín total. Indique cuáles son los valores en cada estado de las observables recién mencionadas.

ELECTROMAGNETISMO

E1. A un material dieléctrico con una cavidad esférica en su interior se le aplica un campo eléctrico homogéneo $\vec{E}_{ext}$ a lo largo de z, tal como se ilustra en la Fig. 1. Para este sistema:

a) [**1 punto**] Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio.

b) [**2 punto**] Calcule la carga inducida en todo el espacio.

c) [**1 punto**] Calcule el campo de polarización, $\vec{P}$, en todo el espacio.

d) [**1 punto**] Calcule el campo eléctrico, $\vec{E}$, en todo el espacio.

e) [**1 punto**] Calcule el vector de desplazamiento, $\vec{D}$, en todo el espacio.

f) [**2 puntos**] Calcule el cambio que sufren cada una de las componentes de estos vectores en la frontera del dieléctrico. Explique detalladamente.

g) [**2 punto**] Dibuje las líneas de campo de $\vec{P}$, $\vec{E}$ y $\vec{D}$.

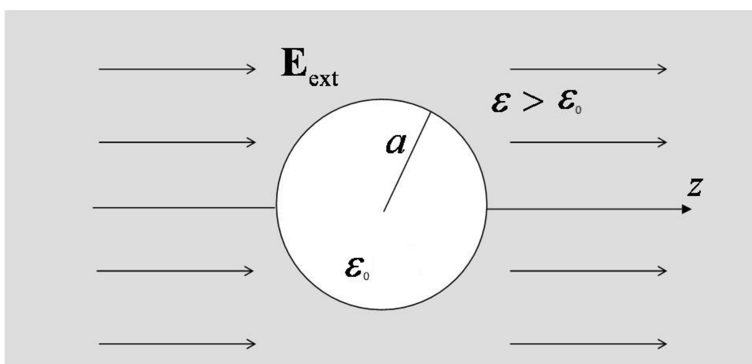


Figura 1: En esta figura ε y ε_0 denotan la permitividad eléctrica del material y del vacío, respectivamente. a es el radio de la cavidad esférica.

FÍSICA MODERNA

F1. **[3 pts]** Una molécula de H_2 está en sus estados fundamentales de vibración y rotación. Absorbe un fotón con una longitud de onda de 2.2112 μm y salta al nivel de energía $v = 1$, $J = 1$. Después cae al nivel de energía $v = 0$, $J = 2$, mientras emite un fotón con una longitud de onda de 2.4054 μm.
a) Calcule el momento de inercia de la molécula de H_2 alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular al enlace H–H.
b) Calcule la frecuencia de vibración de la molécula de H_2.

F2. **[2 pts]**
(a) ¿Qué pasa con el número atómico Z y el número de masa A de un núcleo X (^A_ZX) cuando
i. emite una partícula alfa?
ii. emite un electrón?
iii. emite un positrón?
iv. captura un electrón?
(b) Si el átomo del elemento ^A_ZX es neutro con masa M, y considerando que la masa del átomo de hidrógeno es m_H, del protón m_p y del neutrón m_n, determine la energía de enlace (E_b) para este elemento.

F3. **[3 pts]** El potencial de Lennard-Jones proporciona una descripción de la energía potencial de una molécula diatómica,

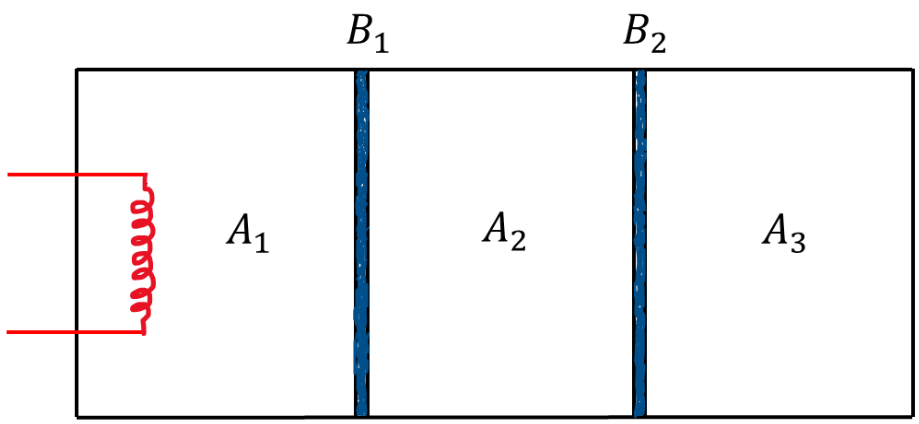
$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6} \ ,$$

donde A y B son constantes. Encuentre, en términos de A y B,
a) el valor r_0 al cual la energía es mínima y
b) la energía E necesaria para romper una molécula diatómica (energía de disociación).

F4. **[2 pts]** De las siguientes reacciones, establezca las leyes de conservación que permiten o prohiben la reacción:
a) $p + p \to n + p + \pi^+$
b) $\gamma + p \to n + \pi^0$
c) $e^- + e^+ \to \mu^+ + \pi^-$
d) $\pi^- + p \to p + \pi^+$

TERMODINÁMICA

T1. (6 puntos) Una caja adiabática de volumen total V se encuentra dividida en tres compartimentos iguales, A_1, A_2 y A_3 como se muestra en la figura. En cada compartimento hay un mol de un determinado gas ideal monoatómico. Los compartimentos están separados por paredes B_1 y B_2 que pueden moverse libremente en la dirección horizontal. La pared B_1 es adiabática y la pared B_2 es térmica (permite la transferencia de calor). Las dos paredes son impermeables a la transferencia de partículas. Inicialmente todos los compartimentos se encuentran a la misma presión $P = 10^5$Pa y temperatura $T = 300\ K$ (por lo tanto, inicialmente los volúmenes de los tres compartimentos son iguales a $V/3$). El compartimento A_1 recibe calor por medio de una resistencia hasta que el compartimento A_3 alcanza una temparatura $T_3 = 340\ K$. Encuentre la temperatura, volumen y presión finales en cada uno de los compartimentos.



T2. (4 puntos) El proceso de Joule-Thomson está descrito por la ecuación

$$dT = \frac{V}{C_p}\left(T\alpha_p - 1\right)dP\ ,$$

donde C_p es la capacidad calorífica a presión constante y α_p es el coeficiente de expansión volumétrica a presión constante. Demuestre que para un gas ideal el proceso de Joule-Thomson se lleva a cabo a temperatura constante.