MECÁNICA CLÁSICA

M1. Considera el Hamiltoniano de un grado de libertad $H = \frac{p^2}{2m}e^{-\frac{q}{a}}$, con a constante.

a) **[2 puntos]** Escribe las ecuaciones de Hamilton.

b) **[2 puntos]** Encuentra las expresiones de $p(t)$ y $q(t)$.

c) **[1 punto]** ¿Hay cantidades conservadas?

M2. Dos objetos de masas m_1 y m_2 están conectados por un resorte de longitud natural l y constante k. El sistema está ubicado sobre una superficie horizontal, y desliza sin fricción en la dirección en la que está extendido el resorte.

a) **[2 puntos]** Escribe el lagrangiano del sistema.

b) **[3 puntos]** Encuentra los modos normales de este sistema y las frecuencias correspondientes.

ELECTROMAGNETISMO

Considera un medio con permitividad ϵ y permeabilidad μ, en el cual viaja una onda electromagnética con un campo eléctrico $\mathbf{E}$ y uno magnético $\mathbf{B}$, los cuales forman un ángulo ϕ entre ellos. Usa las ecuaciones de Maxwell para encontrar las cantidades que te pedimos:

E1. [**1 punto**] ¿Cuál es la intensidad del campo magnético $\mathbf{B}$ máximo?

E2. [**1 punto**] ¿Cual es la densidad de energía de esta onda?

E3. [**1 punto**] ¿Cuál es la presión de radiación que genera?

E4. [**1 punto**] ¿A qué velocidad se desplaza? ¿En qué dirección?

E5. [**1 punto**] Demuestra que en el límite de ondas transversales en el vacío esta velocidad corresponde a la de la luz.

E6. [**1 punto**] Se denomina índice de refracción al cociente de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio cuyo índice se calcula. ¿Cuál es el índice de refracción de este medio?

Las siguientes preguntas se refieren a lo que le ocurre a un haz de luz en este medio al cruzar hacia el vacío:

E7. [**1 punto**] ¿Cuál es el ángulo de reflexión? ¿La energía reflejada?

E8. [**1 punto**] ¿Cuál es el ángulo de refracción? ¿La energía refractada?

E9. [**1 punto**] ¿Hay polarización?

E10. [**1 punto**] ¿Se dispersa la luz?

Rescate. Si consideras que te fue mal con los ejercicios anteriores,
puedes *opcionalmente* resolver el siguiente problema [3 puntos]:

Considera un electrón que atraviesa un campo eléctrico y magnético transversales.

- ¿Qué trayectoria describe?
- ¿Cómo cambia dicha trayectoria si lo que viaja es un protón?
- ¿Qué pasa si es una molécula neutra?

MECÁNICA CUÁNTICA

C1.A **[1 punto]** Dos partículas tienen espín 1/2. Si $\mathbf{J}$ es el momento angular total, especifica cuáles son sus estados acoplados $|lm\rangle$, con números cuánticos l, m, respectivamente, de $\mathbf{J}^2$ y de una componente de $\mathbf{J}$ ($|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$).

C1.B **[1 punto]** Con base en los estados anteriores, encuentra el espectro (energías asociadas a los estados) del hamiltoniano $H = \alpha \mathbf{J}^2$.

C1.C **[3 puntos]** Si se aplica la perturbación $H_1 = \beta(|1,0\rangle\langle 0,0| + |0,0\rangle\langle 1,0|)$, obtén el espectro del hamiltoniano $H + H_1$, usando los estados $|1,0\rangle$, $|0,0\rangle$. Sugerencia: representa los operadores matricialmente.

C2.A **[1.7 puntos]** Considera el siguiente potencial radial en tres dimensiones:

$$V(r) = \begin{cases} -e^2/r & r < a \\ 0 & r > a \end{cases},$$

para una partícula de masa m. Si el estado base tiene la función de onda $\psi(r)Y_{00}(\theta,\phi)$, con el armónico esférico $Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $u(r) = r\psi(r)$ satisface la ecuación

$$[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V(r)]u(r) = Eu(r).$$

$\psi(r)$ se describe para $r < a$ mediante $R^A_{10}(r)$, la función del átomo de hidrógeno, y $R^B_{10}(r)$ que tiene la propiedad $R^B_{10}(r)|_{r\to\infty} \to \infty$. ¿Cuál es la solución $R^C_{10}(r)$ para $r > a$ (explícitamente)?

C2.B **[1.6 puntos]** La solución completa es: en $r < a$, $c_A R^A_{10}(r) + c_B R^B_{10}(r)$, y en $r > a$, $c_C R^C_{10}(r)$. Plantea tres ecuaciones para encontrar c_A, c_B, c_C.

C2.C **[1.7 puntos]** Refiriéndonos a la partícula descrita en los incisos anteriores, si se mide a una distancia $r_0 > a$, según la mecánica cuántica, ¿se encuentra en r_0 una vez que se mide? ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula en el cascarón de radio r_0 y ancho Δr_0, antes de la medición?

TERMODINÁMICA

T1. **[6 puntos]** Un sistema está conformado por dos bloques (1 y 2) en contacto térmico entre sí, ambos de volúmenes constantes. El sistema se encuentra aislado del entorno. Las capacidades caloríficas a volumen constante de los bloques son C_1 y C_2 (las cuales se mantienen constantes), y sus temperaturas iniciales son T_1 y T_2, respectivamente.

a) [1 punto] Demuestra que el calor que fluye por el bloque 1 es el opuesto del calor que fluye por el bloque 2.

b) [1.5 puntos] Calcula la temperatura final del sistema y muestra que se encuentra entre T_1 y T_2.

c) [2 puntos] ¿Cuál es el signo de la variación de la entropía del sistema? ¿La variación de la entropía del bloque 1 tiene el mismo signo que la del bloque 2? Justifica tus respuestas (no es necesario que calcules variaciones de entropía).

d) [1.5 puntos] Ahora, el bloque 1 está inicialmente constituido de hielo a su temperatura de fusión T_{fus}, con calor latente total L. ¿Cuál debe ser la temperatura inicial mínima T_2 del segundo bloque para fundir totalmente el hielo?

T2. **[4 puntos]** La energía libre de Gibbs de un sistema hidrostático de un solo componente está dada por $G = U - TS + PV$.

a) [1 punto] Calcula el diferencial total dG en su forma general, con las notaciones usuales para las cantidades de estado. (Podrás usar el número de partículas N, o el número de moles n.)

b) [1 punto] Deduce la relación de Maxwell para el potencial químico

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_{T,N} . \tag{1}$$

(Si empleaste el número de moles, N se sustituye por n, y μ es el potencial químico por mol).

c) [1 punto] Muestra que el potencial químico del gas ideal se puede escribir como $\mu(P,T) = \mu_0(T) + k_B T \ln(P/P_0)$ (si se usó N).

d) [1 punto] Escribe la fórmula general de Euler para la energía interna y la expresión general de G como función de μ y N (o n).

FÍSICA MODERNA (PARA MAESTRÍA EN FÍSICA)

FF1. [**2 puntos**] Si una barra viaja a una velocidad $v = 0.8c$ a lo largo de su longitud, ¿cuánto se contrae?

FF2. [**2 puntos**] Un haz de muones viaja con velocidad $v = 0.6c$. Su tiempo de vida media observado en el laboratorio es 2.9×10^{-6} s. ¿Cuál es el tiempo de vida media de los muones cuando decaen en reposo?

FF3. [**2 puntos**] Calcula la constante de Madelung para un arreglo de iones en una dimensión con signos alternados y distancia igual entre iones sucesivos.

FF4. [**4 puntos**] Calcula la energía cinética de la partícula α emitida en el proceso
${}^{A}_{Z}\mathrm{X}_N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X}'_{N-2} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}_2$,
donde X y X′ representan diferentes núcleos.

FÍSICA MODERNA (PARA MAESTRÍA EN FÍSICA MÉDICA)

FM1. **[6 pts]** Una semilla de braquiterapia de Au-198 con actividad inicial de 8×10^7 Bq es implantada de forma permanente en la próstata de un paciente con cáncer.

(a) Calcula la radiación total emitida (i.e., el número total de decaimientos que emiten radiación ionizante).

(b) Ahora considera que la semilla se retiró después de 2.9 d. Calcula la radiación total emitida.

Sé explícito en los cálculos y en el manejo de unidades.

Ayuda: Para el Au-198 la vida media es $t_{1/2}$=2.69 d. Recuerda que la vida promedio es $\tau = 1.44 t_{1/2}$

FM2. **[4 pts]** Un haz monoenergético de electrones de 2 MeV impacta en un blanco de tungsteno. Determina la fracción de energía que es emitida como bremsstrahlung y la fracción de energía que se transforma en calor. Sé explícito en los cálculos y en el manejo de unidades.

Ayuda: Considera que para electrones de 2 MeV impactando en tungsteno: $(S/\rho)_{col} = 1.0$ $MeV \cdot cm^2 \cdot g^{-1}$, $(S/\rho)_{rad} = 0.28\ MeV \cdot cm^2 \cdot g^{-1}$ y $(S/\rho)_{tot} = 1.28\ MeV \cdot cm^2 \cdot g^{-1}$.