

INSTRUCCIONES

- No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.
- El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como “tablets”, “smart-phones”, etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.
- El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.
- Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.
- **Aspirantes que exentaron alguna de las secciones del examen:** La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (40 min. por sección/materia). También se le sugiere utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas. En todos los casos, deberá resolver la ”Segunda Parte” (ensayo) de este examen.

Primera Parte

I MECÁNICA CLÁSICA

- I-1. Para el problema de Kepler de un campo central,
- [2 pts] Escriba el Lagrangiano del sistema.
 - [2 pts] Muestre a partir del Lagrangiano que el momento angular se conserva.
 - [2 pts] Calcule el Hamiltoniano del sistema.
- I-2. [2 pts] Plutón tiene un radio que es $1/5$ del radio de la tierra y su masa es $1/500$ la masa de la tierra. Calcule el valor de la aceleración de la gravedad g en la superficie de Plutón.
- I-3. [2 pts] Dos partículas, una de masa m y la otra de masa $2m$, están unidas por un resorte comprimido. La energía del resorte comprimido es de 60 Joules. Si se libera el resorte y éste arroja a las masas, ¿cuál es la energía cinética de cada una de las masas?

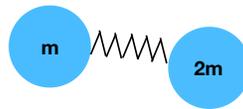


Figure 1: Figura problema 3

II MECÁNICA CUÁNTICA

II-1. [7 pts] Sea un oscilador armónico con el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2,$$

donde el símbolo $\hat{}$ denota un operador. Sus dos primeras funciones normalizadas son $\phi_0(x)$ y $\phi_1(x)$.

- [1 punto] Escriba la ecuación de valores propios general para tal oscilador armónico. Dé la expresión de sus niveles de energía.
- [1 punto] Exprese las funciones $\phi_\alpha(x, t)$, con $\alpha = 0$ y 1 , gracias a la evolución temporal de los estados estacionarios.

Siguiendo con el mismo hamiltoniano, considere ahora un sistema, el cual en $t = 0$ está descrito por la siguiente función de onda:

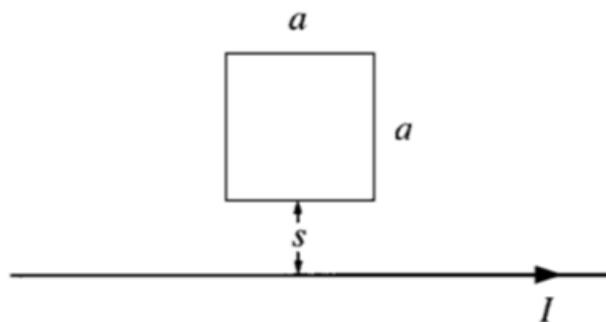
$$\psi(x, t = 0) = \cos \theta \phi_0(x) + \sin \theta \phi_1(x),$$

con $0 \leq \theta < \pi$.

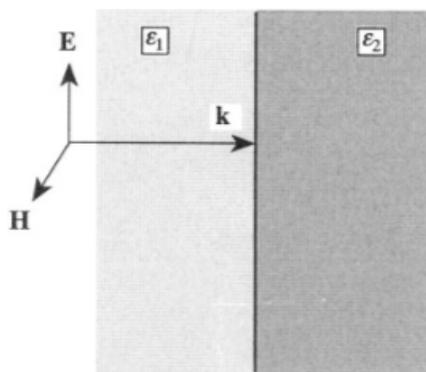
- [1 punto] ¿Cuál es la función de onda $\psi(x, t)$ en el tiempo t ?
 - [2 puntos] Calcule los valores medios $\langle E \rangle$, $\langle E^2 \rangle$ y $\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$. Explique su dependencia en el tiempo.
 - [2 puntos] Calcule la evolución temporal de $\langle x \rangle$ y $\langle x^2 \rangle$; exprese en términos de una integral sobre x de las funciones $\phi_\alpha(x)$ y comente.
- II-2. [3 pts] Responda “verdadero o falso” según sea el caso y comente.
- [1.5 puntos] Si $[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = \mathbf{0}$, los niveles de energía no dependen de m , es decir de los valores propios de la proyección de uno de los componentes del momento angular $\hat{\mathbf{L}}$.
 - [1.5 puntos] Si $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$, los niveles de energía no dependen de l .

III ELECTROMAGNETISMO

- III-1. [5 pts] Un circuito cuadrado, de lado a , yace sobre una mesa, a una distancia s de un alambre recto y muy largo que porta una corriente I , como se muestra en la figura.
- Calcule el flujo magnético a través del circuito.
 - Si el circuito se mueve en la dirección perpendicular al cable con una velocidad v , ¿cuál es la FEM inducida? ¿en qué dirección fluye la corriente?
 - ¿Cuál es la FEM inducida si el circuito se mueve en la dirección de la corriente?



- III-2. [5 pts] Una onda plana monocromática de frecuencia ω se propaga a través de un medio aislante no permeable ($\mu = 1$), con constante dieléctrica ϵ_1 . La onda incide normal sobre la interface de un medio similar con constante dieléctrica ϵ_2 , como se muestra en la figura.
- Derive las condiciones de borde para los campos eléctrico y magnético en la interface.
Hint: Vea la dirección de dichos campos en la figura.
 - Encuentre la fracción de la energía incidente que se transmite al segundo medio.



IV TERMODINÁMICA

- IV-1. [4 pts] Se encuentra que un cierto líquido ebulle a una temperatura de $95\text{ }^\circ\text{C}$ en la cima de una colina, mientras que ebulle a $105\text{ }^\circ\text{C}$ en la base de la colina. El calor latente del líquido es 1000 cal/mol . La densidad del aire es 1.225 Kg/m^3 y la presión atmosférica en la base de la colina es 101325 Pa . ¿Cuál es la altura aproximada de la colina?
- IV-2. [6 pts] Suponga que 1.00 kg de agua a $10.0\text{ }^\circ\text{C}$ se mezcla con 1.00 kg de agua a $30.0\text{ }^\circ\text{C}$ a presión constante. Cuando la mezcla ha alcanzado el equilibrio
- ¿Cuál es la temperatura final?
 - Considere $c_p = 4.19\text{ kJ/(kg K)}$ para el agua y calcule el cambio de entropía del sistema.
 - ¿Es la mezcla un proceso irreversible?

V FÍSICA MODERNA

- V-1. [5 pts] La nave espacial A se mueve a una velocidad $0.9c$ con respecto a la Tierra. Si la nave espacial B rebasa a la nave A a una velocidad relativa $0.5c$ en la misma dirección. ¿Qué velocidad tiene B respecto a la Tierra?
- V-2. [5 pts] Un positron y un electrón con energía cinética despreciable se encuentran y aniquilan produciendo dos fotones de igual energía.
- [2.5 pts] ¿Cuál es la longitud de onda de los fotones?
 - [2.5 pts] Para este proceso, dibuje y explique el diagrama de Feynman de más bajo orden.

Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- Discuta el papel de los sistemas inerciales en las leyes de movimiento de Newton.
- Momento angular en cuántica.
- Ondas electromagnéticas, ¿de dónde surgen? ¿Qué implican?
- Explique y discuta el Teorema de Carnot.
- Interacciones fundamentales de la naturaleza.

INSTRUCCIONES

- No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.
- El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como “tablets”, “smart-phones”, etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.
- El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.
- Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.
- Aspirantes que exentaron alguna de las secciones del examen: La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (40 min. por sección/materia). También se le sugiere utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas. En todos los casos, deberá resolver la ”Segunda Parte” (ensayo) de este examen.

Primera Parte

I MECÁNICA CLÁSICA

- I-1. Para el problema de Kepler de un campo central,
- [2 pts] Escriba el Lagrangiano del sistema.
 - [2 pts] Muestre a partir del Lagrangiano que el momento angular se conserva.
 - [2 pts] Calcule el Hamiltoniano del sistema.
- I-2. [2 pts] Plutón tiene un radio que es $1/5$ del radio de la tierra y su masa es $1/500$ la masa de la tierra. Calcule el valor de la aceleración de la gravedad g en la superficie de Plutón.
- I-3. [2 pts] Dos partículas, una de masa m y la otra de masa $2m$, están unidas por un resorte comprimido. La energía del resorte comprimido es de 60 Joules. Si se libera el resorte y arroja a las masas, ¿cuál es la energía cinética de cada una de las masas?

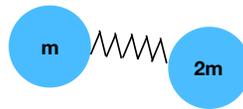


Figure 1: Figura problema 3

II MECÁNICA CUÁNTICA

II-1. [7 pts] Sea un oscilador armónico con el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2,$$

donde el símbolo $\hat{}$ denota un operador. Sus dos primeras funciones normalizadas son $\phi_0(x)$ y $\phi_1(x)$.

- [1 punto] Escriba la ecuación de valores propios general para tal oscilador armónico. Dé la expresión de sus niveles de energía.
- [1 punto] Expresar las funciones $\phi_\alpha(x, t)$, con $\alpha = 0$ y 1 , gracias a la evolución temporal de los estados estacionarios.

Siguiendo con el mismo hamiltoniano, considere ahora un sistema, el cual en $t = 0$ está descrito por la siguiente función de onda:

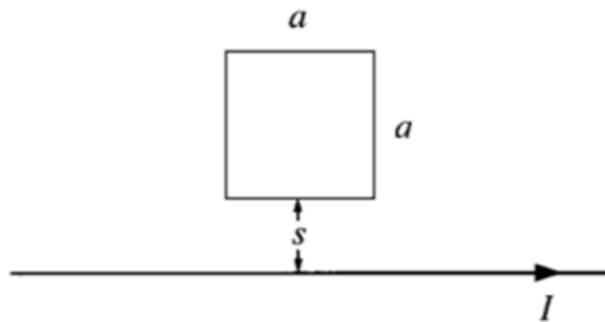
$$\psi(x, t = 0) = \cos \theta \phi_0(x) + \sin \theta \phi_1(x),$$

con $0 \leq \theta < \pi$.

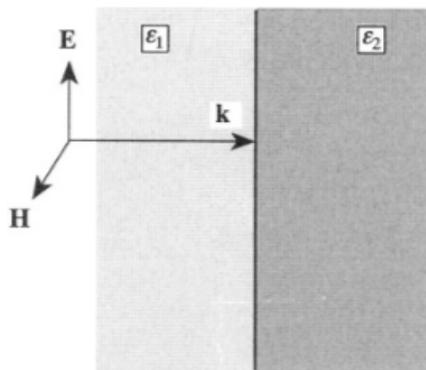
- [1 punto] ¿Cuál es la función de onda $\psi(x, t)$ en el tiempo t ?
 - [2 puntos] Calcule los valores medios $\langle E \rangle$, $\langle E^2 \rangle$ y $\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$. Explique su dependencia en el tiempo.
 - [2 puntos] Calcule la evolución temporal de $\langle x \rangle$ y $\langle x^2 \rangle$; exprese en términos de una integral sobre x de las funciones $\phi_\alpha(x)$ y comente.
- II-2. [3 pts] Responda “verdadero o falso” según sea el caso y comente.
- [1.5 puntos] Si $[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = \mathbf{0}$, los niveles de energía no dependen de m , es decir de los valores propios de la proyección de uno de los componentes del momento angular $\hat{\mathbf{L}}$.
 - [1.5 puntos] Si $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$, los niveles de energía no dependen de l .

III ELECTROMAGNETISMO

- III-1. [5 pts] Un circuito cuadrado, de lado a , yace sobre una mesa, a una distancia s de un alambre recto y muy largo que porta una corriente I , como se muestra en la figura.
- Calcule el flujo magnético a través del circuito.
 - Si el circuito se mueve en la dirección perpendicular al cable con una velocidad v , ¿cuál es la FEM inducida? ¿en qué dirección fluye la corriente?
 - ¿Cuál es la FEM inducida si el circuito se mueve en la dirección de la corriente?



- III-2. [5 pts] Una onda plana monocromática de frecuencia ω se propaga a través de un medio aislante no permeable ($\mu = 1$), con constante dieléctrica ϵ_1 . La onda incide normal sobre la interface de un medio similar con constante dieléctrica ϵ_2 , como se muestra en la figura.
- Derive las condiciones de borde para los campos eléctrico y magnético en la interface.
Hint: Vea la dirección de dichos campos en la figura.
 - Encuentre la fracción de la energía incidente que se transmite al segundo medio.



IV TERMODINÁMICA

- IV-1. [4 pts] Se encuentra que un cierto líquido ebulle a una temperatura de $95\text{ }^{\circ}\text{C}$ en la cima de una colina, mientras que ebulle a $105\text{ }^{\circ}\text{C}$ en la base de la colina. El calor latente del líquido es 1000 cal/mol . La densidad del aire es 1.225 Kg/m^3 y la presión atmosférica en la base de la colina es 101325 Pa . ¿Cuál es la altura aproximada de la colina?
- IV-2. [6 pts] Suponga que 1.00 kg de agua a $10.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ se mezcla con 1.00 kg de agua a $30.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ a presión constante. Cuando la mezcla ha alcanzado el equilibrio
- ¿Cuál es la temperatura final?
 - Considere $c_p = 4.19\text{ kJ/(kg K)}$ para el agua y calcule el cambio de entropía del sistema.
 - ¿Es la mezcla un proceso irreversible?

V FÍSICA MODERNA

- V-1. [5 pts] Considere leche en polvo contaminada con Cs-137, con una actividad específica de 7400 Bq/kg . Para obtener 1 litro de leche líquida se utilizan 250 g de leche en polvo disueltos en 1 litro de agua. El Cs-137 decae por emisión β dando como resultado una β_1 con $E_{max} = 1.176\text{ MeV}$ (5.4%) y una β_2 con $E_{max} = 0.514\text{ MeV}$ (94.6%). La vida media física del Cs-137 es de 30 años .
- Si la β_1 lleva al núcleo hija a su estado basal (no excitado) y la β_2 a un estado metaestable, indique cuál es el cambio en la Z del núcleo hija, el valor Q del decaimiento al estado base y la energía del fotón γ emitido.
 - Calcule el número de átomos de Cs-137 que son ingeridos por un niño que bebió un litro de esa leche radiactiva.
- V-2. [5 pts] Fotones monoenergéticos (200 keV) con fluencia de $10^{10}\text{ fotones/cm}^2$ impactan homogéneamente sobre la pared de un cilindro hueco (un tubo) de plomo ($\rho = 11.4\text{ g/cm}^3$) de 2 cm de diámetro, altura de 10 cm y espesor de las pared de 0.1 cm . Considere que para fotones de esa energía, el coeficiente másico de atenuación en plomo es de $0.99\text{ cm}^2/\text{g}$.
- Calcule el número de fotones que son atenuados en la pared del cilindro.
Hint: El área de la superficie de ese tubo de plomo se puede determinar usando $A = 2\pi rh$.
 - De los fotones atenuados en la pared del cilindro, determine el número de eventos que son resultado del efecto fotoeléctrico. Considere que la probabilidad para el efecto fotoeléctrico para fotones de esa energía interaccionando en plomo es: $\tau/\rho = 0.85\text{ cm}^2/\text{g}$.

Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- Discuta el papel de los sistemas inerciales en las leyes de movimiento de Newton.
- Momento angular en cuántica.
- Ondas electromagnéticas, ¿de dónde surgen? ¿Qué implican?
- Explique y discuta el Teorema de Carnot.
- Discuta la dualidad onda-partícula de la radiación electromagnética.