INSTRUCCIONES

- **No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.**
- **El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como "tablets", "smart-phones", etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.**
- **El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.**
- **Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.**
- **<u>Aspirantes exentos:</u> La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (40 min. por sección/materia). También se le sugiere utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas. En todos los casos, deberá resolver la "Segunda Parte" (ensayo) de este examen.**

Primera Parte

I MECÁNICA CLÁSICA

Deberá resolver el primer problema, y algún otro de los problemas 2 y 3.

I-1. [**5 pts**] Un péndulo está suspendido del techo de un vagón de tren que se desplaza hacia la derecha con una aceleración $\mathbf{A_0}$. Un pasajero en el tren observa que el péndulo forma un ángulo θ con la vertical .

i. Determine la magnitud de $\mathbf{A_0}$ según un observador fijo situado en el andén.

ii. Escriba las ecuaciones de Newton del movimiento, de acuerdo al pasajero en el tren y el observador en el andén. Muestre que el pasajero puede interpretar la inclinación del péndulo como asociada a una fuerza ficticia $\mathbf{F'_0}$.

I-2. [**5 pts**] Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial

$$V(x,y) = \frac{1}{2}kx^2 + 2ky^2.$$

Las condiciones iniciales del sistema son: $x(0) = a$, $y(0) = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = v_0$.

i. Encuentre las ecuaciones de movimiento en el esquema de Lagrange.

ii. Determine las frecuencias naturales de oscilación.

iii. Encuentre la solución general del problema.

I-3. [**5 pts**] Una partícula está sujeta a la acción de una fuerza central

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\epsilon}{r^4}.$$

i. Encuentre las ecuaciones de movimiento en el esquema de Lagrange y de Hamilton.

ii. Muestre que el momento angular del sistema se conserva.

iii. Determine las condiciones que conducen a una órbita circular estable.

iv. Encuentre la frecuencia de dicha órbita.

II MECÁNICA CUÁNTICA

Deberá resolver el primer problema, y algún otro de los problemas 2 y 3.

II-1. **[5 pts]**

i. Escriba la ecuación de onda de Schrödinger para una función de onda Ψ y para su compleja conjugada.
ii. Escriba el valor esperado de una variable dinámica representada por el operador hermitiano $\widehat{O}$.
iii. Calcule la derivada total con respecto al tiempo de ese valor esperado usando i) y simplifique.
iv. Interprete físicamente el resultado explicando el significado de cada uno de sus términos y factores.
v. Explique las condiciones para que la variable dinámica sea una constante de movimiento.
vi. Ilustre la aplicación de los resultados para $\widehat{O} = \vec{r}, \vec{p}$

II-2. **[5 pts]** Las componentes cartesianas del momento angular satisfacen las reglas de conmutación:

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar\hat{l}_z \quad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hbar\hat{l}_x \quad [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hbar\hat{l}_y.$$

Los operadores $\hat{l}_\pm = \hat{l}_x \pm \hat{l}_y$ son operadores de ascenso y descenso al actuar sobre las eigenfunciones $|lm\rangle$ del cuadrado del momento angular $\hat{L}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$ y de la componente z del momemto angular $\hat{l}_z$. Para justificar esta afirmación:

i. Calcule los conmutadores $[\hat{l}_+, \hat{l}_z]$, $[\hat{l}_-, \hat{l}_z]$, $[\hat{l}_+, \hat{l}_-]$.
ii. Escriba $\hat{L}^2$ en términos de $\hat{l}_+$, $\hat{l}_-$.
iii. Analice las acciones de los operadores individuales y sus combinaciones cuadráticas sobre las eigenfunciones $|lm\rangle$.

II-3. **[5 pts]** El hamiltoniano de la interacción de un dipolo eléctrico y un campo eléctrico externo tiene la forma

$$\widehat{H} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = e\vec{r} \cdot \hat{k}E_o = eE_o r\cos\theta = eE_o z$$

i. Esboce el análisis del Efecto Stark para el átomo de hidrógeno en los cuatro estados con $n = 2$ para un campo eléctrico constante a lo largo del eje z.
ii. Identifique los elementos de matriz que se anulan y los que no se anulan, así como sus relaciones, explicando las razones respectivas.
iii. Ilustre gráficamente la permanencia y el desdoblamiento de los niveles respectivos, incluyendo las nuevas eigenfunciones para los últimos.

III ELECTROMAGNETISMO

Elija las respuestas adecuadas agregando una breve justificación. Sólo hay una respuesta correcta por problema.

III-1. [**2.5 pts**] En el contexto de electrostática, ¿cuál de las siguientes relaciones garantiza la existencia de un potencial electrostático V tal que $\vec{E} = -\nabla V$?

i. $\vec{F} = q\vec{E}$, donde $\vec{F}$ es la fuerza sobre una partícula con carga q.
ii. $\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{da} = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$, donde Q_{enc} es la carga total encerrada por $\mathcal{S}$.
iii. $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, siendo ρ la densidad de carga.
iv. $\nabla \times \vec{E} = 0$.
v. $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$.

III-2. [**2.5 pts**] Suponiendo que en todo el espacio no hay corrientes libres, pero si hay magnetización (estática) $\vec{M}$, ¿cuánto vale el campo magnético $\vec{B}$?

i. $\vec{B} = 0$.
ii. $\vec{B} = (\mu_0/4\pi)\int(\vec{M} \times \hat{R}/R^2)d^3x'$ donde $\vec{R}$ es el vector que va de punto en el que se está integrando al punto donde se evalúa $\vec{B}$, $R = |\vec{R}|$, y $\hat{R} = \vec{R}/R$.
iii. $\vec{B} = \mu_0\vec{M}$.
iv. $\vec{B} = \mu_0\nabla \cdot \vec{M}$.
v. $\vec{B} = \mu_0\nabla \times \vec{M}$.

III-3. [**2.5 pts**] Considere un circuito con resistencia total R. Si un imán de longitud l cruza el área encerrada por el circuito con velocidad uniforme v, ¿cómo se comporta la corriente inducida?

i. No hay corriente inducida.
ii. La corriente inducida es estable, es decir, no cambia con el tiempo.
iii. La corriente crece uniformemente con el tiempo.
iv. Se genera una corriente que oscila con frecuencia $\nu = v/l$.
v. La corriente fluye en una dirección cuando entra el imán y en la dirección opuesta cuando sale.

III-4. [**2.5 pts**] Una onda electromagnética se propaga en el vacío. El campo eléctrico oscila paralelo al eje x y el magnético paralelo al eje y. ¿En qué dirección se propaga la energía de esta onda?

i. Las ondas electromagnéticas no propagan energía.
ii. En la dirección x.
iii. En la dirección y.
iv. En el plano xy a 45º del eje x.
v. En la dirección z.

IV TERMODINÁMICA

IV-1. **[3 pts]** Se tiene un gas ideal con capacidades caloríficas constantes confinado dentro de un cilindro horizontal, aislado térmica y mecánicamente del exterior. Dentro del cilindro hay un pistón diatérmico (conductor del calor) sin fricción que se mantiene estático y que divide al gas en dos compartimientos. Del lado izquierdo el volumen del gas es V_o , está a temperatura T_o y a presión $2\,P_o$, mientras que del lado derecho el gas también tiene volumen V_o y temperatura T_o, pero su presión es P_o. Si se suelta el pistón, calcule

  i. la temperatura final de ambos compartimientos (T_f),
  ii. la presión final de ambos compartimientos (P_f), y
  iii. los volúmenes finales del lado izquierdo (V_i) y del lado derecho (V_d).

IV-2. **[2 pts]** Demuestre que $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$, usando la enería libre de Helmholtz: $F(T,V) = U - TS$.

IV-3. **[3 pts]** Demuestre que la entropía de un gas ideal con capacidades caloríficas constantes satisface

$$S - S_o = C_p \ln\left(\frac{T}{T_o}\right) - nR\ln\left(\frac{p}{p_o}\right)$$

donde el subíndice o indica un estado de referencia.

IV-4. **[2 pts]** ¿Es estable un sistema termodinámico con energía libre de Gibbs

$$G(T,p) = c\,N\,p^2\,\sqrt{T},$$

con constante $c > 0$?

V FÍSICA MODERNA

V-1. **[3 pts]** Un cohete viaja con movimiento relativo a la Tierra. Un observador en la Tierra encuentra que, entre 1pm y 2pm, según su reloj, transcurrieron 3601s en el reloj del cohete. ¿cuál es la velocidad v del cohete relativa a la Tierra?

V-2. **[3 pts]** La vida media del $^{24}_{11}Na$ es de 15 hrs. ¿Cuánto tardará en desintegrarse el 93.75%?

V-3. **[4 pts]** La energía de enlace del núcleo (E_b) tiene una fórmula semiempírica dada por la ecuación:

$$E_b = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_4\frac{(N-Z)^2}{A}$$

Considerando que a_i con $i = 1,2,3,4$ son constantes, explique el origen de cada uno de los cuatro términos.

Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- Ecuaciones de movimiento en marcos de referencia no inerciales.
- Conjunto Completo de Observables que Conmutan entre si.
- Campos y su rol en la teoría electromagnética. ¿Cuál es el cambio de paradigma respecto a la física newtoniana?
- Entropía.
- Considere un fenómeno física de su interés, explique el origen de éste, cómo se ha medido o cómo podria ser medido.