

**INSTRUCCIONES**

- No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.
- El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como “tablets”, “smart-phones”, etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.
- El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.
- Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.
- Aspirantes exentos: La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (40 min. por sección/materia). También se le sugiere utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas. En todos los casos, deberá resolver la ”Segunda Parte” (ensayo) de este examen.

## Primera Parte

### I MECÁNICA CLÁSICA

- I-1. [5 pts] Una esfera de masa  $M$  y radio  $R$  se mueve sin deslizar sobre un plano inclinado de ángulo  $\alpha$  y masa  $m$ . El plano inclinado, a su vez, se puede mover sobre una superficie  $S$  sin fricción. Encuentre las ecuaciones de movimiento de la esfera a lo largo del plano inclinado y del plano inclinado sobre la superficie  $S$ .
- I-2. [5 pts] El movimiento de una partícula de masa  $m$  es descrito por el lagrangiano

$$L = e^{\gamma t} \left[ \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2} \right] \quad (1)$$

donde  $k$  y  $\gamma$  son constantes.

- i. Encuentre el hamiltoniano asociado al lagrangiano anterior
- ii. Encuentre la ecuación de movimiento de la partícula en la formulación de Hamilton.
- iii. ¿Hay cantidades conservadas? Justifique su respuesta.

## II MECÁNICA CUÁNTICA

## II-1. [2 pts]

- i. ¿Qué tipo de ecuación a derivadas parciales (es decir, elíptica, parabólica o hiperbólica) es la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo?
- ii. ¿Qué consecuencias tiene su respuesta en (i) por lo que se refiere a las condiciones iniciales?
- iii. ¿En qué otro campo de la Física ocurre una ecuación del tipo que usted identificó en la pregunta (i)?

## II-2. [2 pts] Un sistema está descrito por el vector de estado

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle, \quad (2)$$

donde  $|a_n\rangle$  son los eigenvectores del operador Hermítico  $\hat{A}$ ; es decir

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n |a_n\rangle. \quad (3)$$

¿Cuál es la interpretación física de los coeficientes  $c_n$  de la Ec. (2)?

II-3. [2 pts] En  $t = 0$ , la función de onda de una partícula libre en una dimensión es un paquete centrado en  $x = 0$  y con  $\langle \hat{p} \rangle_{t=0} \neq 0$ .

Muestre que, como función de  $t$ ,

$$\langle \hat{p} \rangle_t = \langle \hat{p} \rangle_{t=0}. \quad (4)$$

¿Se parece este resultado al que se tiene para una partícula clásica?

II-4. [4 pts] Considere un sistema de una partícula en tres dimensiones. Sean  $\hat{\ell}$  y  $\hat{s}$  los operadores de momento angular orbital y de espín, respectivamente.

- i. Demuestre que el operador espín-órbita

$$\hat{W} = \alpha \hat{\ell} \cdot \hat{s}, \quad (5)$$

donde  $\alpha$  es una constante, es diagonal en el esquema de estados acoplados

$$|l, s, j, m_j\rangle, \quad (6)$$

donde  $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\ell} + \hat{s}$ . [Sugerencia: construya el operador  $\hat{\mathbf{j}}^2 = (\hat{\ell} + \hat{s})^2$ .]

- ii. ¿Cuánto valen los eigenvalores de  $\hat{W}$ ?

## III ELECTROMAGNETISMO

III-1. [5 pts] Un alambre de metal con conductividad  $\sigma$ , de forma cilíndrica con una area  $A$  en su sección transversal, lleva una corriente en su estado estacionario.

- i. Determine la dirección y magnitud del vector de Poynting en la superficie del alambre.
- ii. Integre la componente normal del vector de Poynting sobre la superficie del alambre para un segmento de longitud  $L$ .

III-2. [5 pts] El campo eléctrico de una onda electromagnética en el vacío está dado por

$$E_x = 0, \quad E_y = 30 \cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x\right), \quad E_z = 0,$$

donde  $\mathbf{E}$  está en volts/metro y  $x$  en metros. Determine:

- i. La frecuencia, la longitud de onda y la dirección de propagación de la onda.
- ii. La dirección del campo magnético.
- iii. La densidad de flujo de energía  $\langle \mathbf{S} \rangle$

## IV TERMODINÁMICA

- IV-1. Un inventor reclama que su dispositivo de refrigeración, operando a una temperatura ambiente de 300 K, produce 24.0 kg/h de hielo, a su punto de fusión normal (273 K), a partir de agua a la misma temperatura. El dispositivo consume 100 W. Si la entalpía específica de fusión (calor latente de fusión) del agua en condiciones normales es  $3.335 \times 10^5$  J/kg:
- i. **[3.5 pts]** Examine el reclamo del inventor utilizando el primer principio de la termodinámica y comente.
  - ii. **[3.5 pts]** Examine el reclamo del inventor utilizando el segundo principio de la termodinámica y comente.
  - iii. **[3.0 pts]** Estime la cantidad mínima de calor por hora que debe extraer y la potencia del dispositivo, en caso de que la propuesta del inventor viole alguna de las leyes de los incisos anteriores.

## V FÍSICA MODERNA

V-1. [2 pts] Explique cuáles son los postulados de la relatividad especial y cuáles son sus consecuencias.

V-2. [3 pts]

- i. Demuestre que la diferencia de energía entre los niveles de rotación con números cuánticos de movimiento angular  $J$  y  $J - 1$  es  $J\hbar^2/I$ .
- ii. En términos de  $J$ ,  $\hbar$  e  $I$  (momento de inercia) ¿cuál es la frecuencia del fotón emitido en la transición de rotación pura  $J \rightarrow J - 1$ ?

V-3. [3 pts] El potencial de Lennard-Jones proporciona una descripción de la energía potencial de una molécula diatómica,

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

donde A y B son constantes. Encuentre, en términos de A y B,

- i. el valor  $r_0$  al cual la energía es mínima, y
- ii. la energía  $E$  necesaria para romper una molécula diatómica.

V-4. [2 pts] ¿Cuántos protones y neutrones hay en los siguientes núcleos?

- i.  ${}_{14}^{28}\text{Si}$
- ii.  ${}_{37}^{85}\text{Rb}$
- iii.  ${}_{81}^{205}\text{Tl}$ .

## Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- Elabore un ensayo sobre las fuerzas centrales.
- La interpretación probabilística de la Mecánica Cuántica.
- Explique brevemente la propagación de la luz en un medio dieléctrico anisotrópico.
- Relaciones termodinámicas y sus aplicaciones.
- Materiales superconductores y sus aplicaciones.