INSTRUCCIONES

- **No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.**
- **El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como "tablets", "smart-phones", etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.**
- **El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.**
- **Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.**
- **Aspirantes exentos: La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (40 min. por sección/materia). También se le sugiere utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas. En todos los casos, deberá resolver la "Segunda Parte" (ensayo) de este examen.**

Primera Parte

I MECÁNICA CLÁSICA

I-1. **[5 pts]** Considere una pequeña embarcación que se encuentra sobre aguas calmadas en el ecuador. Si un montacargas en dicha embarcación eleva un contenedor (m=200 Kg) a una altura de 20 m, explique:

i. ¿Por qué la embarcación comienza a moverse?
ii. ¿En qué dirección se moverá?
iii. ¿Con qué velocidad se moverá?

Considere que la embarcación y el montacargas pesan en conjunto M=1000 Kg. La velocidad angular de la tierra es 7.25×10^{-5} rad/seg.

I-2. **[5 pts]** Considere una barra homogénea de longitud l y masa m que mantiene un punto en contacto con una superficie cilíndrica rugosa (la barra no resbala sobre el cilindro). El eje del cilindro es horizontal, y cuando la barra está horizontal, su centro de masa está sobre la parte mas alta del cilindro. Se manipula la barra de tal manera que comienza a realizar oscilaciones pequeñas alrededor de su posición horizontal.

i. Encuentre las energías cinética y potencial.
ii. Escriba la condición de rodadura.
iii. ¿Cuál es el Lagrangiano del sistema en la aproximación de pequeñas oscilaciones?
iv. Obtenga la ecuación de movimiento.
v. Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones de la barra.

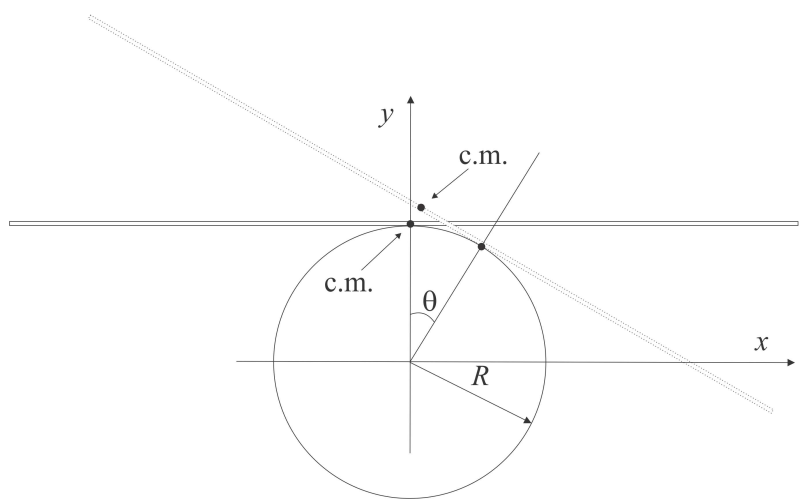


Figure 1: Problema 2.

II MECÁNICA CUÁNTICA

II-1. **[5 pts]** Considere un sistema de espín 1/2, con el operador $\mathbf{S}$ dado en la forma convencional $\mathbf{S} = (\hbar/2)\sigma$, con las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para un estado de este sistema descrito por

$$\chi = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i. ¿Qué condiciones deben de cumplir α y β para que el estado sea aceptable físicamente?

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir la componente del espín en la dirección x se obtenga 0?

iii. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir la componente del espín en la dirección z se obtenga $\hbar/2$?

iv. ¿Cuál es el valor esperado de la componente del espín en la dirección x?

II-2. **[5 pts]** Considere el potencial unidimensional

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ \infty \text{ si } x > 0. \end{cases},$$

y un haz monocromático de partículas de energía $E > 0$ y masa m que inciden desde $x < 0$ sobre él.

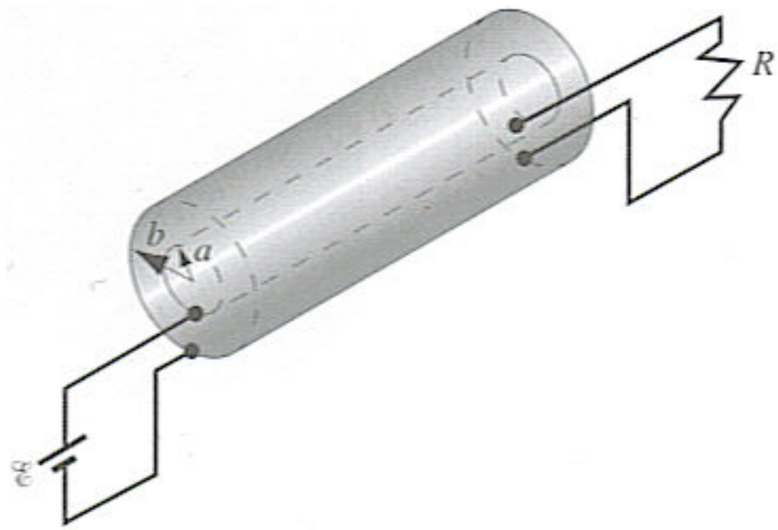
i. Encuentre la solución a la ecuación de Schrödinger en todo el intervalo $-\infty < x < \infty$.

ii. ¿Es normalizable esta función de onda?

iii. Explique por qué la derivada de la función de onda no es continua en todo el intervalo.

III ELECTROMAGNETISMO

III-1. Considere un cable coaxial largo, de longitud l, que consiste de un conductor interior (de radio a) y un conductor exterior (de radio b). Por un lado, está conectado a una batería y, por el otro, contiene una resistencia R, como se aprecia en la figura. El conductor interior porta una densidad de carga λ y una corriente estacionaria I que fluye hacia la derecha y regresa por el conductor exterior, el cual porta una densidad de carga $-\lambda$. Responda claramente las siguientes preguntas e indique, en cada caso, las leyes físicas que utilizó (nómbrelas y explíquelas).



i. **[1 pts]** ¿Qué significa que la corriente que porta el cable sea estacionaria?
ii. **[2 pts]** Calcule el campo eléctrico entre los conductores.
iii. **[2 pts]** Calcule el campo magnético en la misma región.
iv. **[1.5 pts]** Calcule el vector de Poynting en esa región. ¿Cuál es el significado físico del vector de Poynting?
v. **[1 pts]** Demuestre que la dirección del vector de Poynting siempre se dirige de la batería a la resistencia, sin importar la forma (polaridad) en la que esté conectada la batería.
vi. **[0.5 pts]** Calcule la densidad de momento lineal electromagnético entre los conductores. Si no recuerda la expresión para el momento lineal, recuerde que éste es proporcional al vector de Poynting y su expresión exacta la puede obtener con un simple análisis dimensional.
vii. **[0.5 pts]** Calcule el momento electromagnético total almacenado entre los conductores.
viii. **[1.5 pts]** ¿Qué ecuación o ecuaciones de Maxwell no utilizó al resolver los incisos anteriores? Escríbalas, nómbrelas y explíquelas.

IV TERMODINÁMICA

IV-1. [**2pts**] **Potenciales termodinámicos**

i. Considere la energía libre de Gibbs G. ¿Cuáles son sus variables naturales? ¿Cuál es su diferencial total dG?

ii. Pruebe que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N} = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N}$$

IV-2. [**3 pts**] **Transiciones de fase**

i. Considere un sistema descrito por la ecuación de estado de Van der Waals. Dibuje tres isotermas en un diagrama pV. Indique el punto crítico. Marque la región de coexistencia de dos fases.

ii. Dibuje el diagrama de fases pT para el agua. Indique el punto crítico y el punto triple. ¿Qué significado físico tiene el punto triple?

IV-3. [**5 pts**] **El motor de Stirling**

Un motor que usa un mol de un gas ideal monoatómico realiza un ciclo en cuatro etapas: (A-B) expansión isotérmica de un volumen V_A a un volumen V_B. (B-C) enfriamiento isocórico de la temperatura T_{AB} a la temperatura T_{CD}. (C-D) Compresión isotérmica del volumen $V_C{=}V_B$ al volumen $V_D{=}V_A$. (D-A) calentamiento isocórico de la temperatura T_{CD} a la temperatura T_{AB}.

i. Dibuje el proceso en un diagrama pV y en un diagrama TV.

ii. Calcule el trabajo y el calor intercambiados en cada etapa.

iii. Calcule la eficiencia del motor.

V FÍSICA MODERNA

V-1. Un mesón π con energía en reposo de $139.6MeV$, moviéndose con velocidad $0.906c$, choca con un protón estático, que tiene una energía de $938.3MeV$.

i. **[1 pts]** Calcule la energía total relativista de la partícula resultante.

ii. **[1 pts]** Encuentre el momento lineal total de la partícula resultante.

V-2. La molécula de HCl tiene una frecuencia de vibración de 8.66×10^{13} Hz y su espectro vibracional muestra picos de absorción separados por una cantidad $\Delta\nu = 6 \times 10^{11}$ Hz. Empleando estos datos calcule:

i. **[1 pts]** la energía vibracional más baja de la molécula.

ii. **[2 pts]** el momento de inercia del HCl.

iii. **[1 pts]** la separación de equilibrio entre los átomos ($m_H = 1.0079u$, $m_{Cl} = 35.453u$).

El valor de la constante de Planck es $h = 6.63 \times 10^{-34} J \cdot s$.

V-3. La vida media de ^{198}Au es de 2.7 días. Calcule:

i. **[2 pts]** la constante de decaimiento de ^{198}Au.

ii. **[2 pts]** la actividad de $1\mu g$ de ^{198}Au, cuya masa molar es $M = 198$ g/mol.

Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación, elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- Relación entre la ecuación de onda de Schrödinger de la Mecánica Cuántica y la ecuación de Hamilton-Jacobi de la Mecánica Clásica
- La dualidad onda-partícula
- La importancia de las ecuaciones de Maxwell en la tecnología
- Implicaciones de la segunda ley de la termodinámica
- El papel que desempeñó la teoría de semiconductores en el desarrollo de la electrónica.

INSTRUCCIONES

- **No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.**
- **El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como "tablets", "smart-phones", etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.**
- **El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.**
- **Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.**
- **Aspirantes exentos: La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (40 min. por sección/materia). También se le sugiere utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas. En todos los casos, deberá resolver la "Segunda Parte" (ensayo) de este examen.**

Primera Parte

I MECÁNICA CLÁSICA

I-1. **[5 pts]** Considere una pequeña embarcación que se encuentra sobre aguas calmadas en el ecuador. Si un montacargas en dicha embarcación eleva un contenedor (m=200 Kg) a una altura de 20 m, explique:

i. ¿Por qué la embarcación comienza a moverse?
ii. ¿En qué dirección se moverá?
iii. ¿Con qué velocidad se moverá?

Considere que la embarcación y el montacargas pesan en conjunto M=1000 Kg. La velocidad angular de la tierra es 7.25×10^{-5} rad/seg.

I-2. **[5 pts]** Considere una barra homogénea de longitud l y masa m que mantiene un punto en contacto con una superficie cilíndrica rugosa (la barra no resbala sobre el cilindro). El eje del cilindro es horizontal, y cuando la barra está horizontal, su centro de masa está sobre la parte mas alta del cilindro. Se manipula la barra de tal manera que comienza a realizar oscilaciones pequeñas alrededor de su posición horizontal.

i. Encuentre las energías cinética y potencial.
ii. Escriba la condición de rodadura.
iii. ¿Cuál es el Lagrangiano del sistema en la aproximación de pequeñas oscilaciones?
iv. Obtenga la ecuación de movimiento.
v. Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones de la barra.

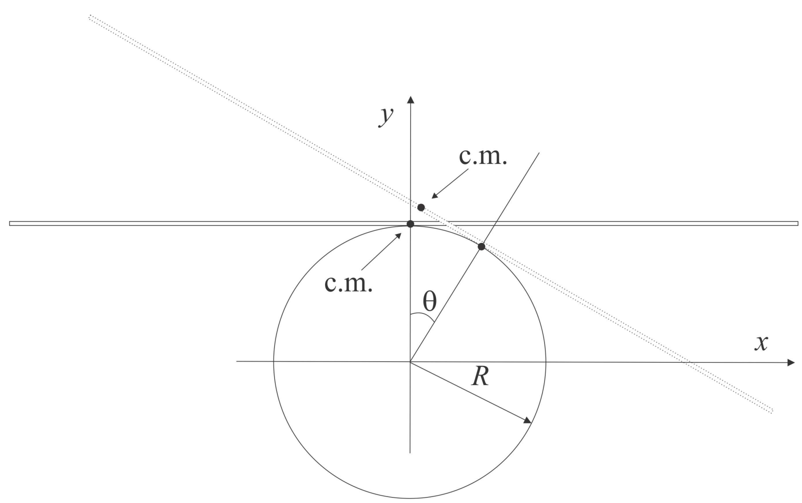


Figure 1: Problema 2.

II MECÁNICA CUÁNTICA

II-1. **[5 pts]** Considere un sistema de espín 1/2, con el operador $\mathbf{S}$ dado en la forma convencional $\mathbf{S} = (\hbar/2)\sigma$, con las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para un estado de este sistema descrito por

$$\chi = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i. ¿Qué condiciones deben de cumplir α y β para que el estado sea aceptable físicamente?

ii. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir la componente del espín en la dirección x se obtenga 0?

iii. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir la componente del espín en la dirección z se obtenga $\hbar/2$?

iv. ¿Cuál es el valor esperado de la componente del espín en la dirección x?

II-2. **[5 pts]** Considere el potencial unidimensional

$$V(x) = \begin{cases} 0 \ \text{si} \ x < 0, \\ \infty \ \text{si} \ x > 0. \end{cases},$$

y un haz monocromático de partículas de energía $E > 0$ y masa m que inciden desde $x < 0$ sobre él.

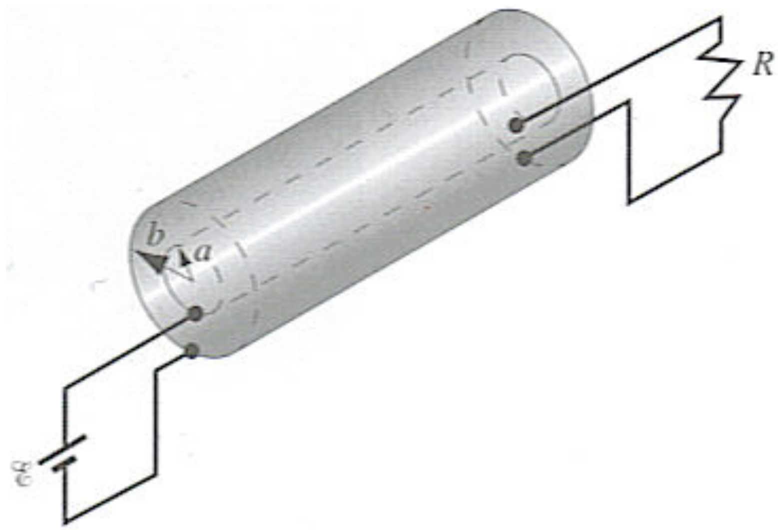
i. Encuentre la solución a la ecuación de Schrödinger en todo el intervalo $-\infty < x < \infty$.

ii. ¿Es normalizable esta función de onda?

iii. Explique por qué la derivada de la función de onda no es continua en todo el intervalo.

III ELECTROMAGNETISMO

III-1. Considere un cable coaxial largo, de longitud l, que consiste de un conductor interior (de radio a) y un conductor exterior (de radio b). Por un lado, está conectado a una batería y, por el otro, contiene una resistencia R, como se aprecia en la figura. El conductor interior porta una densidad de carga λ y una corriente estacionaria I que fluye hacia la derecha y regresa por el conductor exterior, el cual porta una densidad de carga $-\lambda$. Responda claramente las siguientes preguntas e indique, en cada caso, las leyes físicas que utilizó (nómbrelas y explíquelas).



i. **[1 pts]** ¿Qué significa que la corriente que porta el cable sea estacionaria?
ii. **[2 pts]** Calcule el campo eléctrico entre los conductores.
iii. **[2 pts]** Calcule el campo magnético en la misma región.
iv. **[1.5 pts]** Calcule el vector de Poynting en esa región. ¿Cuál es el significado físico del vector de Poynting?
v. **[1 pts]** Demuestre que la dirección del vector de Poynting siempre se dirige de la batería a la resistencia, sin importar la forma (polaridad) en la que esté conectada la batería.
vi. **[0.5 pts]** Calcule la densidad de momento lineal electromagnético entre los conductores. Si no recuerda la expresión para el momento lineal, recuerde que éste es proporcional al vector de Poynting y su expresión exacta la puede obtener con un simple análisis dimensional.
vii. **[0.5 pts]** Calcule el momento electromagnético total almacenado entre los conductores.
viii. **[1.5 pts]** ¿Qué ecuación o ecuaciones de Maxwell no utilizó al resolver los incisos anteriores? Escríbalas, nómbrelas y explíquelas.

IV TERMODINÁMICA

IV-1. [**2pts**] **Potenciales termodinámicos**

i. Considere la energía libre de Gibbs G. ¿Cuáles son sus variables naturales? ¿Cuál es su diferencial total dG?

ii. Pruebe que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N} = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N}$$

IV-2. [**3 pts**] **Transiciones de fase**

i. Considere un sistema descrito por la ecuación de estado de Van der Waals. Dibuje tres isotermas en un diagrama pV. Indique el punto crítico. Marque la región de coexistencia de dos fases.

ii. Dibuje el diagrama de fases pT para el agua. Indique el punto crítico y el punto triple. ¿Qué significado físico tiene el punto triple?

IV-3. [**5 pts**] **El motor de Stirling**

Un motor que usa un mol de un gas ideal monoatómico realiza un ciclo en cuatro etapas: (A-B) expansión isotérmica de un volumen V_A a un volumen V_B. (B-C) enfriamiento isocórico de la temperatura T_{AB} a la temperatura T_{CD}. (C-D) Compresión isotérmica del volumen V_C=V_B al volumen V_D=V_A. (D-A) calentamiento isocórico de la temperatura T_{CD} a la temperatura T_{AB}.

i. Dibuje el proceso en un diagrama pV y en un diagrama TV.

ii. Calcule el trabajo y el calor intercambiados en cada etapa.

iii. Calcule la eficiencia del motor.

V FÍSICA MODERNA

V-1. Arqueólogos del Instituto Nacional de Antropología e Historia encontraron en la zona arqueológica de Cuicuilco, en el sur de la Ciudad de México, muy cerca de Ciudad Universitaria, un trozo de madera tallada, con una masa de 25 g, el cual consideran que era parte de una lanza prehispánica. Para determinar si ese trozo de madera corresponde con el periodo en el que se desarrolló la cultura cuicuilca (800 a.c. al 250 d.c.), se realizó una prueba de radiocarbono para medir la actividad de ^{14}C presente en la muestra. Los resultados determinaron que, a la fecha actual, la actividad en el pedazo de madera es de 4.62 Bq y se estimó que la actividad de ^{14}C en el árbol, justo cuando fue cortado para fabricar la lanza, era de 6.24 Bq. Si el ^{14}C decae a ^{14}N y tiene una vida media de 5730 años, determine:

i. **[1 pts]** El tipo de decaimiento que presenta el ^{14}C, Justifique su respuesta describiendo el proceso de decaimiento Padre a Hija.

ii. **[2 pts]** La energía cinética máxima de la(s) partícula(s) emitida(s). Dibuje el diagrama de energía para el decaimiento y el espectro de emisión (describa detalladamente el gráfico del espectro).

iii. **[2 pts]** El año en el que el árbol fue cortado para obtener la madera con la que se elaboró la lanza. ¿El año corresponde con el periodo de la cultura cuicuilca?

Hint: la masa atómica del $^{14}_{6}C$ y del $^{14}_{7}N$ son 14.003242 u y 14.003074 u, respectivamente.

V-2. Considere un fotón con longitud de onda $\lambda = 0.00247$ Å, que interacciona con la materia (agua por ejemplo).

i. **[2 pts]** Determine la energía (en MeV) y el momento ($kg \cdot m \cdot s^{-1}$) de ese fotón.

ii. **[3 pts]** Indique si la energía de ese fotón puede resultar en producción de pares. Explique detalladamente cómo y bajo qué condiciones se puede dar ese proceso. Si es el caso, calcule la energía cinética promedio del par electrón-positrón resultante y explique los procesos de transferencia energética que pueden resultar de la interacción del electrón y el positrón con los átomos de la materia.

Hint: $h = 6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot s$, $1MeV = 1.602 \times 10^{-13}J$.

Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación, elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- Relación entre la ecuación de onda de Schrödinger de la Mecánica Cuántica y la ecuación de Hamilton-Jacobi de la Mecánica Clásica
- La dualidad onda-partícula
- La importancia de las ecuaciones de Maxwell en la tecnología
- Implicaciones de la segunda ley de la termodinámica
- Los modelos atómicos más trascendentales que han existido hasta la fecha