INSTRUCCIONES

- **No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.**
- **El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como "tablets", "smart-phones", etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.**
- **El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.**
- **Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.**
- **<u>Estudiantes exentos:</u> La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (40 min. por sección/materia). En todos los casos, deberá resolver la "Segunda Parte" (ensayo) de este examen.**

Primera Parte

I MECÁNICA CLÁSICA

I-1. [**5 pts**]Una partícula de masa m cae verticalmente bajo la acción de la gravedad. Suponga que existe una fuerza de amortiguamiento proporcional a su velocidad, $f_\kappa = -\kappa v$, producida por el aire en el que se mueve la partícula.

i. [**1 pts**] Determine la ecuación de movimiento de la partícula.

ii. [**2 pts**] Muestre que la velocidad de la partícula tiende a un valor constante cuando $t \to \infty$.

iii. [**2 pts**] Determine la posición de la partícula como función del tiempo.

I-2. [**5 pts**] Una partícula de masa m_1 y velocidad v_1 colisiona con otra partícula de masa m_2 que inicialmente está en reposo. Después de la colisión las partículas permanecen juntas formando otra partícula.

i. [**1 pts**] Determine la velocidad de la partícula final.

ii. [**2 pts**] Calcule el cociente entre las energías cinéticas totales antes y después de la colisión.

iii. [**2 pts**] Discuta el caso particular del cociente anterior en el que $m_1 = m_2$.

II MECÁNICA CUÁNTICA

II-1. **[1 pts]** Escriba la ecuación de Schrödinger.

[2 pts] Para potenciales que no dependen del tiempo, construya las soluciones espaciales y temporales empleando separación de variables.

II-2. Muestre que, si $\hat{H}\psi_i(\vec{r}) = E_i\psi_i(\vec{r})$, $i = 1, 2...$, entonces

i. **[1 pts]** $\psi_i(\vec{r})$ y $\psi_j(\vec{r})$ son ortogonales si $E_i \neq E_j$.

ii. **[1 pts]** Escriba la función de onda del sistema al tiempo t, $\Psi(\vec{r}, t)$, si se lo prepara en el estado inicial $\Psi(\vec{r}, 0) = \sum_i a_i\psi_i(\vec{r})$, y se lo deja evolucionar en el tiempo.

II-3. Sea $\Psi_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_1(\vec{r})e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2(\vec{r})e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$, con las condiciones del inciso anterior y $E_2 = 3E_1$,

i. **[1 pts]** Muestre que $\Psi_a(\vec{r}, t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger.

ii. **[2 pts]** Calcule, en términos de E_1, $\langle\Psi_a|E|\Psi_a\rangle$ y $\langle\Psi_a|E^2|\Psi_a\rangle$.

iii. **[1 pts]** Explique cuáles son los posibles resultados que se pueden obtener al medir la energía del sistema descrito por Ψ_a.

iv. **[1 pts]** ¿Con qué frecuencia se espera encontrar esos resultados, al medir repetidamente sobre copias igualmente preparadas de ese sistema?

III ELECTROMAGNETISMO

III-1. **[5 pts]** En una región del espacio, el campo magnético está descrito por

$$\vec{B} = B_0 e^{ax}\sin(ky - \omega t)\hat{z} \tag{1}$$

con $a < 0$

i. Calcule el campo eléctrico E.

ii. Encuentre la velocidad de propagación de la onda.

iii. Haga un diagrama tridimensional del campo a un tiempo arbitrario $t = t_0$. ¿Será posible generar este tipo de campo? Si es así, ¿Cómo?

III-2. **[5 pts]** Un cable largo coaxial, de longitud l, consiste de un conductor interno de radio a y uno externo de radio b. El conductor interno transporta una carga uniforme por unidad de longitud λ, y una corriente estacionaria I hacia la derecha; el conductor externo tiene carga y corriente opuesta. Suponga que los dos conductores se mantienen a una diferencia de potencial V. Ver figura 1.

i. Encuentre los campos electromagnéticos entre los cilindros.

ii. Calcule el vector de Poynting.

iii. Calcule la energía por unidad de tiempo (potencia) P transportada por los cables.

iv. Verifique que se cumple: $P = VI$.

v. Evalúe el momento electromagnético p almacenado en los campos.

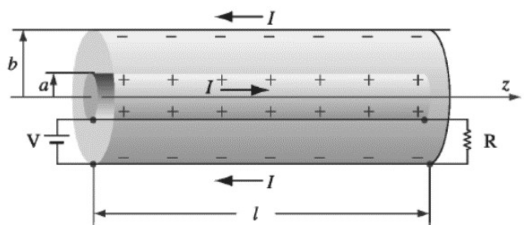

Figure 1: Cilindros coaxiales.

IV TERMODINÁMICA

IV-1. **[5pts]** El gas de van der Waals, descrito por la ecuación de estado $(P+a/v^2)(v-b) = RT$, es un ejemplo simple de un sistema que presenta una transición de fase líquido gas. En dicha ecuación v es el volumen molar y a y b son constantes positivas. Demuestre para dicho gas que:

i. (**3 pts**) El calor específico molar a volumen constante $c_v(T)$ es una función exclusiva de la temperatura.

ii. (**2 pts**) El calor específico molar a presión constante **no** es una función exclusiva de la temperatura sino que también depende del volumen molar (por ejemplo).

Información adicional. Puede usar la primera ecuación de la energía: $(\partial u/\partial v)_T = T(\partial P/\partial T)_v - P$, así como la relación entre los calores específicos molares: $c_p - c_v = Tv\beta^2/\kappa_T$, siendo β la expansividad volumétrica y κ_T la compresibilidad isotérmica.

IV-2. **[5 pts]** La entropía molar s, de una sustancia pura satisface la relación

$$s(u, v) = b\, u^{1/4}\, v^{1/2}$$

donde u y v denotan la energía interna molar y el volumen molar, respectivamente, y b es una constante positiva.

i. (**2.5 pts**) Considere la expansión libre del gas desde un volumen v_1 a uno v_2 con $v_2 > v_1$. Si la expansión ocurre cuando el sistema está aislado de sus alrededores use la segunda ley de la termodinámica para demostrar que el proceso es irreversible.

ii. (**2.5 pts**) Considere la coexistencia hipotética entre una fase condensada (sólida o líquida) y la fase gaseosa de la sustancia. Denote con l el calor latente por mol de la transición. En la aproximación cuando el volumen de la fase condensada es mucho menor que el de la fase gaseosa, demuestre que la pendiente de la curva de coexistencia en el plano P-T (presión vs temperatura) está dada por

$$\frac{dP}{dT} = \frac{32\, l}{b^4}\, \frac{P^3}{T^5}$$

[Indicio: Encuentre la presión P explícitamente como función de T y v].

V FÍSICA MODERNA

V-1. El número atómico del Vanadio (V) es 23.

i. **[2 pts]** Escriba su configuración electrónica fundamental.

ii. **[3 pts]** Escriba los niveles atómicos en los que se desdobla la última capa no llena del átomo de Vanadio debido a la interacción espín-órbita.

V-2. Suponga que se tiene un laboratorio con un acelerador de partículas que produce paquetes de 10^8 piones cargados positivamente (π^+) con una velocidad $v = 1/\sqrt{2}$ veces la velocidad de la luz en el vacío (3×10^8 m/s) en el sistema de referencia del laboratorio. Los piones se desintegran en muones (μ^+) y en neutrinos muónicos (ν_μ): $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ con una semivida de $t_{1/2} = 3 \times 10^{-8}$ segundos. Si en el laboratorio tengo un detector de piones a una cierta distancia del acelerador de partículas que detecta $\frac{1}{4} \times 10^8$ piones:

i. **[1.5 pts]** ¿Cuánto tiempo ha transcurrido en el sistema de referencia de los piones desde su producción hasta su detección?

ii. **[1.5 pts]** ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde la producción hasta la detección en el sistema de referencia del laboratorio?

iii. **[0.5 pts]** ¿Qué distancia han recorrido los piones en en el sistema de referencia de los piones?

iv. **[1.5 pts]** ¿A qué distancia se encuentra el detector del acelerador de partículas en el sistema de referencia de laboratorio?

Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación, elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- El teorema de Noether
- Las propiedades cuánticas del vacío
- La propagación de la luz en un medio dieléctrico anisotrópico
- Procesos irreversibles en la naturaleza
- Método de Hartree en física atómica

INSTRUCCIONES

- **No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.**
- **El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como "tablets", "smart-phones", etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.**
- **El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.**
- **Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.**
- <u>**Estudiantes exentos:**</u> **La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (40 min. por sección/materia). En todos los casos, deberá resolver la "Segunda Parte" (ensayo) de este examen.**

Primera Parte

I MECÁNICA CLÁSICA

I-1. [**5 pts**]Una partícula de masa m cae verticalmente bajo la acción de la gravedad. Suponga que existe una fuerza de amortiguamiento proporcional a su velocidad, $f_\kappa = -\kappa v$, producida por el aire en el que se mueve la partícula.

  i. [**1 pts**] Determine la ecuación de movimiento de la partícula.
  ii. [**2 pts**] Muestre que la velocidad de la partícula tiende a un valor constante cuando $t \to \infty$.
  iii. [**2 pts**] Determine la posición de la partícula como función del tiempo.

I-2. [**5 pts**] Una partícula de masa m_1 y velocidad v_1 colisiona con otra partícula de masa m_2 que inicialmente está en reposo. Después de la colisión las partículas permanecen juntas formando otra partícula.

  i. [**1 pts**] Determine la velocidad de la partícula final.
  ii. [**2 pts**] Calcule el cociente entre las energías cinéticas totales antes y después de la colisión.
  iii. [**2 pts**] Discuta el caso particular del cociente anterior en el que $m_1 = m_2$.

II MECÁNICA CUÁNTICA

II-1. **[1 pts]** Escriba la ecuación de Schrödinger.

[2 pts] Para potenciales que no dependen del tiempo, construya las soluciones espaciales y temporales empleando separación de variables.

II-2. Muestre que, si $\hat{H}\psi_i(\vec{r}) = E_i\psi_i(\vec{r})$, $i = 1, 2...$, entonces

i. **[1 pts]** $\psi_i(\vec{r})$ y $\psi_j(\vec{r})$ son ortogonales si $E_i \neq E_j$.

ii. **[1 pts]** Escriba la función de onda del sistema al tiempo t, $\Psi(\vec{r}, t)$, si se lo prepara en el estado inicial $\Psi(\vec{r}, 0) = \sum_i a_i\psi_i(\vec{r})$, y se lo deja evolucionar en el tiempo.

II-3. Sea $\Psi_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_1(\vec{r})e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2(\vec{r})e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$, con las condiciones del inciso anterior y $E_2 = 3E_1$,

i. **[1 pts]** Muestre que $\Psi_a(\vec{r}, t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger.

ii. **[2 pts]** Calcule, en términos de E_1, $\langle\Psi_a|E|\Psi_a\rangle$ y $\langle\Psi_a|E^2|\Psi_a\rangle$.

iii. **[1 pts]** Explique cuáles son los posibles resultados que se pueden obtener al medir la energía del sistema descrito por Ψ_a.

iv. **[1 pts]** ¿Con qué frecuencia se espera encontrar esos resultados, al medir repetidamente sobre copias igualmente preparadas de ese sistema?

III ELECTROMAGNETISMO

III-1. **[5 pts]** En una región del espacio, el campo magnético está descrito por

$$\vec{B} = B_0 e^{ax}\sin(ky - \omega t)\hat{z} \tag{1}$$

con $a < 0$

i. Calcule el campo eléctrico E.

ii. Encuentre la velocidad de propagación de la onda.

iii. Haga un diagrama tridimensional del campo a un tiempo arbitrario $t = t_0$. ¿Será posible generar este tipo de campo? Si es así, ¿Cómo?

III-2. **[5 pts]** Un cable largo coaxial, de longitud l, consiste de un conductor interno de radio a y uno externo de radio b. El conductor interno transporta una carga uniforme por unidad de longitud λ, y una corriente estacionaria I hacia la derecha; el conductor externo tiene carga y corriente opuesta. Suponga que los dos conductores se mantienen a una diferencia de potencial V. Ver figura 1.

i. Encuentre los campos electromagnéticos entre los cilindros.

ii. Calcule el vector de Poynting.

iii. Calcule la energía por unidad de tiempo (potencia) P transportada por los cables.

iv. Verifique que se cumple: $P = VI$.

v. Evalúe el momento electromagnético p almacenado en los campos.

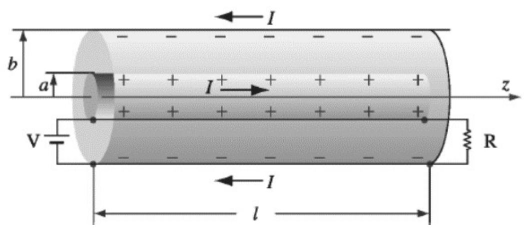

Figure 1: Cilindros coaxiales.

IV TERMODINÁMICA

IV-1. **[5pts]** El gas de van der Waals, descrito por la ecuación de estado $(P+a/v^2)(v-b) = RT$, es un ejemplo simple de un sistema que presenta una transición de fase líquido gas. En dicha ecuación v es el volumen molar y a y b son constantes positivas. Demuestre para dicho gas que:

i. (**3 pts**) El calor específico molar a volumen constante $c_v(T)$ es una función exclusiva de la temperatura.

ii. (**2 pts**) El calor específico molar a presión constante **no** es una función exclusiva de la temperatura sino que también depende del volumen molar (por ejemplo).

Información adicional. Puede usar la primera ecuación de la energía: $(\partial u/\partial v)_T = T(\partial P/\partial T)_v - P$, así como la relación entre los calores específicos molares: $c_p - c_v = Tv\beta^2/\kappa_T$, siendo β la expansividad volumétrica y κ_T la compresibilidad isotérmica.

IV-2. **[5 pts]** La entropía molar s, de una sustancia pura satisface la relación

$$s(u, v) = b\, u^{1/4}\, v^{1/2}$$

donde u y v denotan la energía interna molar y el volumen molar, respectivamente, y b es una constante positiva.

i. (**2.5 pts**) Considere la expansión libre del gas desde un volumen v_1 a uno v_2 con $v_2 > v_1$. Si la expansión ocurre cuando el sistema está aislado de sus alrededores use la segunda ley de la termodinámica para demostrar que el proceso es irreversible.

ii. (**2.5 pts**) Considere la coexistencia hipotética entre una fase condensada (sólida o líquida) y la fase gaseosa de la sustancia. Denote con l el calor latente por mol de la transición. En la aproximación cuando el volumen de la fase condensada es mucho menor que el de la fase gaseosa, demuestre que la pendiente de la curva de coexistencia en el plano P-T (presión vs temperatura) está dada por

$$\frac{dP}{dT} = \frac{32\, l}{b^4}\, \frac{P^3}{T^5}$$

[Indicio: Encuentre la presión P explícitamente como función de T y v].

V FÍSICA MODERNA

V-1. El $^{188}_{75}Re$ es un radionúclido con gran potencial para la terapia del cáncer. Se sabe que éste decae a $^{188}_{76}Os$. Si la vida media del $^{188}_{75}Re$ es de 17 h y la masa atómica de ambos radionúclidos es 187.958106 u ($^{188}_{75}Re$) y 187.955830 u ($^{188}_{76}Os$), determine:

   i. **[2 pts]** El tipo de decaimiento que presenta el $^{188}_{75}Re$, la energía que se libera en el proceso y las energías máxima y promedio (si es el caso) de la(s) partícula(s) emitida(s). Justifique su respuesta describiendo el proceso de decaimiento Padre a Hija. Dibuje el diagrama de energía para el decaimiento.

   ii. **[1 pts]** Calcule la constante de decaimiento radiactivo y la vida promedio del $^{188}_{75}Re$

   iii. **[2 pts]** Considere una actividad inicial de 50 mCi para una muestra de $^{188}_{75}Re$ y calcule el número de núcleos que decayeron durante las primeras 12 horas.

V-2. Considere un tubo de rayos X con ánodo de tungsteno (W) en el que la energía de ligadura de los electrones en la capa K es de 69.5 keV. Cuando se aplica un voltaje V_0 entre los electrodos del tubo se produce un espectro continuo de rayos X junto con dos líneas espectrales características $K_{\alpha 1}$ y $K_{\alpha 2}$ con energías de 59.3 y 58.0 keV, respectivamente. Determine:

   i. **[3 pts]** El voltaje mínimo que se debe aplicar entre los electrodos del tubo para generar ese espectro, las energías máxima y promedio del espectro continuo y las energías de ligaduras de los electrones que producen el espectro característico; identifique las subcapas en las que se da el proceso y dibuje el diagrama de niveles de energía del proceso de rayos X característicos. Justifique sus respuestas.

   ii. **[2 pts]** El espesor de aluminio que se requiere para blindar los rayos X característicos de mayor energía que resulte equivalente a un blindaje de plomo de 1 mm de espesor. Considere que las intensidades de la radiación incidente y transmitida es la misma en ambos materiales. Asuma que los coeficientes másicos de atenuación para los rayos X característicos de mayor energía en aluminio y plomo son 0.277 y 4.87 cm^2g^{-1}, respectivamente. Las densidades del aluminio y del plomo son 2.69 y 11.33 $g\ cm^{-3}$.

Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación, elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- El teorema de Noether
- Las propiedades cuánticas del vacío
- La propagación de la luz en un medio dieléctrico anisotrópico
- Procesos irreversibles en la naturaleza
- Los procesos de interacción de radiación (partículas cargadas y fotones) con materia.