

## INSTRUCCIONES

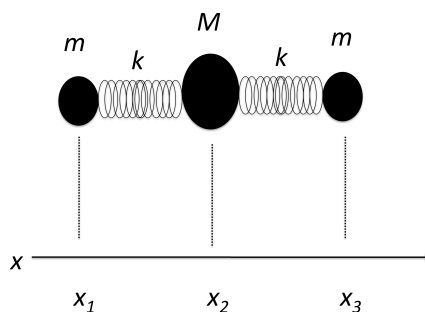
- No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.
- El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como “tablets”, “smart-phones”, etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.
- El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada uno de los problemas.
- Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.
- Estudiantes exentos: La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (35 min. por sección/materia). En todos los casos, deberá resolver la “Segunda Parte” (ensayo) de este examen.

## Primera Parte

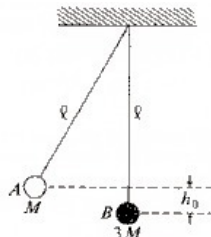
## I MECÁNICA CLÁSICA

Escoja **TRES** de los siguientes cuatro problemas. Si encuentra las soluciones en una sola línea, no se extienda.

- I-1. Una partícula bajo la acción de la gravedad está restringida a moverse en la curva  $z = y^2$  ( $z$  es perpendicular a la superficie de la tierra). Considerando sólo dos dimensiones ( $y$  y  $z$ ), escriba el Lagrangiano.
- I-2. Muestre que si un sistema de partículas tiene momento lineal total nulo, su momento angular total es independiente del origen.
- I-3. Considere tres partículas en un arreglo unidimensional conectadas por dos resortes, cada uno con constante  $k$ . La partícula de la mitad tiene masa  $M = 3m$  y las otras dos, masa  $m$  (ver la figura). Describa el movimiento si la frecuencia angular observada es  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ .



- I-4. Dos esferas A y B, de masa  $m$  y  $3m$  cuelgan del techo del mismo punto mediante dos cuerdas, ambas de longitud  $\ell$ . La esfera A se ubica de tal manera que la cuerda está extendida y tiene una diferencia de altura con la esfera B de  $h_0$  (ver figura). Posteriormente se suelta la esfera A, al colisionar con la B se pegan. ¿Hasta que altura sube el sistema compuesto?



## II MECÁNICA CUÁNTICA

- II-1. (30%) En una dimensión se encuentra un intervalo  $a \leq x \leq b$  donde la densidad de corriente  $J$  de una partícula cumple la relación

$$J(a) = J(b). \quad (1)$$

Discuta brevemente de dónde proviene la igualdad dada por la ec. (1) y qué condición general impone sobre la función de onda correspondiente.

- II-2. Considere la ecuación radial de Schrödinger con momento angular  $\ell = 0$  para el problema de una partícula de masa  $m$  que incide con energía  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ , donde  $k$  el número de onda, sobre el potencial

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq r \leq L \\ 0, & r \geq L. \end{cases} \quad (2)$$

La solución  $u(k, r)$  del problema en la región  $r \geq L$  puede escribirse como

$$u(k, r) = (i/2) \left[ e^{-ikr} - S(k)e^{ikr} \right].$$

Note que este problema es idéntico al problema en 1 dimensión donde la partícula incide por la derecha sobre un potencial con valor infinito para distancias menores o iguales a  $L$ .

- (a) (25%) Obtenga la función  $S(k)$  del problema.  
 (b) (15%) Calcule  $|S(k)|^2$  y discuta su significado físico.
- II-3. (30%) Suponga que una partícula con espín  $1/2$  se encuentra en el estado

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son las probabilidades de obtener  $+\hbar/2$  y  $-\hbar/2$  si se mide  $S_z$ ?

**Hint:** Use los espinores  $\chi_+$  y  $\chi_-$ , dados respectivamente por

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## III ELECTROMAGNETISMO

- III-1. Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  se mueve en el plano  $xy$  bajo la acción de un campo uniforme de inducción magnética  $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ . Describa el movimiento de la partícula.
- III-2. (a) Escriba las ecuaciones de Maxwell para el vacío en presencia de fuentes  $\rho$  y  $\mathbf{J}$ .  
 (b) A partir de ellas obtenga la ecuación de continuidad.  
 (c) Demuestre que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  pueden escribirse en términos de un campo escalar  $\Phi$  y un campo vectorial  $\mathbf{A}$ .  
 (d) Derive las ecuaciones de la Electroestática y la Magnetostática.  
 (e) Verifique que  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3$  satisface las ecuaciones de la electrostática.

## IV TERMODINÁMICA

IV-1. *Máquinas térmicas.*

- (a) (**2 pts**) Escriba la segunda ley de la termodinámica en forma infinitesimal para un proceso reversible y para un proceso irreversible. Defina las cantidades involucradas.
- (b) (**2 pts**) Una máquina *reversible* opera entre 3 reservorios a temperaturas  $T_1 = 400$  K,  $T_2 = 300$  K y  $T_3 = 200$  K. Durante un ciclo completo, la sustancia del motor extrae 1200 J del reservorio de temperatura  $T_1$  y transfiere 100 J al reservorio de temperatura  $T_3$ . Calcule el calor intercambiado con el reservorio de temperatura  $T_2$ .
- (c) (**2 pts**) Calcule el trabajo realizado sobre la máquina del inciso (b) en un ciclo. Determine si se trata de un motor o un refrigerador.

- IV-2. (**2 pts**) En una transición gas ( $g$ ) - líquido ( $l$ ), muestre a partir de la ecuación de Clausius-Clapeyron, que el aumento de la entropía por partícula (o entropía específica),  $s^{(g)} - s^{(l)}$ , está dado por

$$s^{(g)} - s^{(l)} \approx \left( \frac{dP}{dT} \right) \frac{k_B T}{P}. \quad (3)$$

Considere el gas ideal y los volúmenes específicos tales que  $v^{(g)} \gg v^{(l)}$ .

- IV-3. (**2 pts**) La función de Massieu  $J$  de un sistema se define como

$$J = S - \frac{U}{T}. \quad (4)$$

Demuestre que  $dJ = \frac{U}{T^2} dT + \frac{P}{T} dV$ . Derive una relación de Maxwell a partir de esta relación.

## V FÍSICA MODERNA

- V-1. (2.5 pts) Dos autos **A** y **B**, corren con velocidad relativista a lo largo de trayectorias perpendiculares. El auto **A** se dirige en dirección positiva de un eje a  $0.75c$ , mientras que **B** se dirige en dirección negativa del otro eje, con velocidad  $-0.9c$ . ¿Qué tan rápido se aleja **B** desde el punto de vista de **A**?
- V-2. (5 pts) Una molécula de  $H_2$  está en sus estados fundamentales de vibración y rotación. Absorbe un fotón con una longitud de onda de  $2.2112 \mu\text{m}$  y salta al nivel de energía  $v = 1, J = 1$  ( $v$  y  $J$  son los números cuánticos asociados a la vibración y rotación, respectivamente). Después cae al nivel de energía  $v = 0, J = 2$ , mientras emite un fotón con una longitud de onda de  $2.4054 \mu\text{m}$ .
- Calcule el momento de inercia de la molécula de  $H_2$  alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular al enlace  $H-H$
  - Calcule la frecuencia de vibración de la molécula de  $H_2$
  - Calcule la separación energética entre el equilibrio y el estado excitado para esta molécula.
- V-3. (2.5 pts) Una muestra del isótopo  $^{131}\text{I}$ , que tiene una vida media de 8.04 días, tiene una actividad de 5.0 mCi en el tiempo de embarque para su transportación. Al recibir la muestra en un laboratorio médico, la actividad es de 2.1 mCi. ¿Cuánto tiempo transcurrió entre las dos mediciones?

## Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- La conservación de la energía en la Física.
- Movimiento de cuerpos rígidos sometidos y no sometidos a torques y fuerzas.
- El tiempo en Mecánica Cuántica.
- Modelos del núcleo atómico.
- Interpretación física de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales.